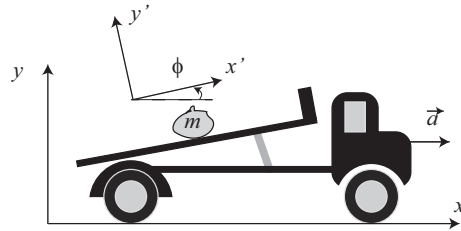


TD 3 : Référentiel non-galiléen

Les indispensables

Exercice 1

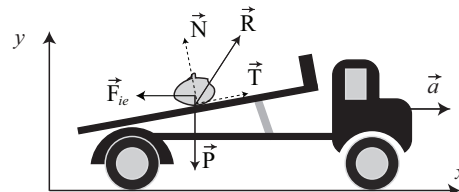
Un camion muni d'une benne accélère avec une accélération uniforme $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$. On note ϕ l'angle formé par l'horizontal et la benne du camion. Un sac de sable de masse m est posé sur la benne, on note f le coefficient de frottement entre la surface de la benne et le sac.



- 1 - Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur le sac de sable.
- 2 - Déterminer une condition sur a_0 pour que le sac de sable soit immobile dans le référentiel du camion.
- 3 - Dans le cas où le sac glisse, déterminer $\ddot{x}'(t)$ et décrire le mouvement.

Exercice 1

- 1 - Dans le référentiel non galiléen associé au camion, le tas de sable est soumis à



- la réaction du support :
 $\vec{R} = T\vec{e}_{x'} + N\vec{e}_{y'}$
 - son poids : $\vec{P} = -mg \sin \phi \vec{e}_{x'} - mg \cos \phi \vec{e}_{y'}$
 - la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -ma_0 \cos \phi \vec{e}_{x'} + ma_0 \sin \phi \vec{e}_{y'}$
- 2 - La projection du PFD dans le cas statique dans le référentiel non galiléen donne

$$0 = T - mg \sin \phi - ma_0 \cos \phi \quad \text{et} \quad N = mg \cos \phi - ma_0 \sin \phi$$

Dans le cas du non-glissement :

$$T \leq fN \quad \text{soit} \quad mg \sin \phi + ma_0 \cos \phi \leq f(mg \cos \phi - ma_0 \sin \phi)$$

- 3 - Lors que le sac glisse, appliquons le principe fondamental de la dynamique selon Ox' :

$$m\ddot{x}' = T - mg \sin \phi - ma_0 \cos \phi$$

Avec $T = f(mg \cos \phi - ma_0 \sin \phi)$, on obtient :

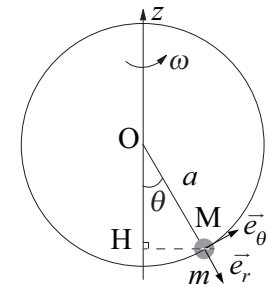
$$\ddot{x}' = f(g \cos \phi - a_0 \sin \phi) - g \sin \phi - a_0 \cos \phi$$

Il s'agit donc d'un mouvement uniformément accéléré.

Exercice 2

Un cerceau de rayon a tourne autour de l'axe Oz à vitesse angulaire constante ω . Une perle de masse m se déplace sans frottement sur le cerceau. Dans le référentiel du cerceau en rotation, on définit une force d'inertie (communément appelée force centrifuge) donnée par

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$$



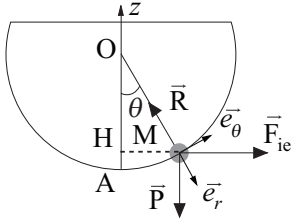
avec H projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

- 1 - Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur $E_{P,pes}$ en fonction de m , g , a et θ . On prendra une énergie potentielle nulle en $\theta = 0$.
- 2 - Montrer que l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement est de la forme :

$$E_{P,ie} = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta$$

- 3 - Déterminer l'énergie potentielle totale de la perle dans le référentiel tournant avec le cerceau et en déduire les positions d'équilibre de la perle selon les valeurs de ω .
- 4 - Discuter la stabilité de ces positions d'équilibre en fonction de ω . Tracer l'allure de l'énergie potentielle pour $\omega = 0$ et $\omega > \sqrt{g/a}$.

Exercice 2



1 - Dans le référentiel tournant avec le cerceau, le système {perle} est soumis à

- son poids : $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$;
- la réaction du cerceau $\vec{R} = R \vec{e}_r + R \vec{e}_z$;
- la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = mHM\omega^2(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\text{avec } HM = a \sin \theta$$

Le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{P,pes} = mgz + C^{te}$$

Projetons la position de la bille sur l'axe Oz , il vient : $z = -a \cos \theta$.

Injectons l'altitude de la perle dans l'énergie potentielle et déterminer la constante avec une énergie potentielle nulle en $\theta = 0$:

$$E_{P,pes} = -mga \cos \theta + C^{te} \quad \text{soit} \quad 0 = -mga + C^{te}$$

Ainsi,

$$E_{P,pes} = mga(1 - \cos \theta)$$

2 - Dans le référentiel tournant, la réaction du support et la force d'inertie de Coriolis sont perpendiculaires au mouvement. On ne retiendra donc pas d'énergie potentielle pour ces forces. La force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle suivante

$$E_{Pie} = - \int_A^M \vec{F}_{ie} d\vec{OM}$$

On choisit l'origine de l'énergie potentielle nulle en $\theta = 0$ (point A). Dans le référentiel tournant, pour un mouvement de rotation le long du cerceau $d\vec{OM} = ad\theta \vec{e}_\theta$, il vient

$$E_{Pie} = - \int_0^\theta ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta$$

3 - L'énergie potentielle totale vaut donc

$$E_{P,tot} = mga(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta$$

Les positions d'équilibres sont obtenues pour $dE_{P,tot}/d\theta = 0$:

$$\frac{dE_{P,tot}}{d\theta} = mga \sin \theta - ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

Il vient ensuite :

$$\sin \theta(mga - ma^2\omega^2 \cos \theta) = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_{eq} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \theta_{eq} = \frac{g}{a\omega^2}$$

La dernière valeur n'est évidemment possible que si $\omega^2 > g/a$.

4 - La stabilité d'une position d'équilibre est définie par

$$\frac{d^2E_{P,tot}}{d\theta^2} > 0$$

soit

$$mga \cos \theta - ma^2\omega^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) > 0$$

Si $\omega^2 \leq g/a$, il n'y a qu'une position d'équilibre $\theta_{eq} = 0$.

Ainsi,

$$\frac{d^2E_{P,tot}}{d\theta^2}(\theta = 0) = mga - ma^2\omega^2 > 0$$

Pour $\omega^2 \leq g/a$, $\theta_{eq} = 0$ est un équilibre stable.

Si $\omega^2 > g/a$, il y a deux positions d'équilibre

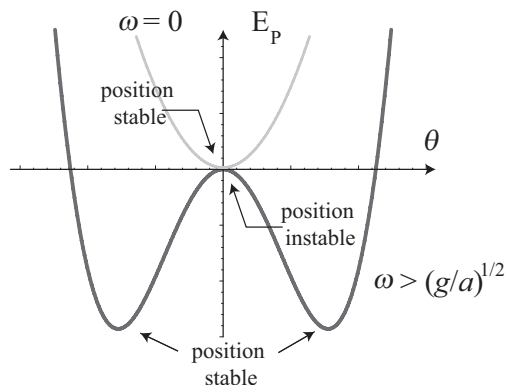
$$\frac{d^2E_{P,tot}}{d\theta^2}(\theta = 0) = mga - ma^2\omega^2 < 0$$

La position d'équilibre $\theta = 0$ est donc instable.

$$\frac{d^2E_{P,tot}}{d\theta^2}(\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}) = mga \frac{g}{a\omega^2} - ma^2\omega^2 \left[\left(\frac{g}{a\omega^2} \right)^2 - \left(1 - \left(\frac{g}{a\omega^2} \right)^2 \right) \right]$$

$$\frac{d^2E_{P,tot}}{d\theta^2}(\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}) = -ma^2\omega^2 \left[\left(\frac{g}{a\omega^2} \right)^2 - 1 \right] > 0$$

La position d'équilibre $\cos \theta = g/a\omega^2$ est donc stable. Pour $\omega^2 > a/g$, $\theta_{eq} = 0$ est un équilibre instable et $\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}$ est stable.



Remarque 1 :

Ce genre de dispositif associé à des boules en rotation est appelé « régulateur de Watt ». Il est, en outre, utilisé pour réguler la vitesse de rotation de machines à vapeur. À partir d'une certaine vitesse de rotation (ici $\omega_{lim} = g/a$), la position stable des boules n'est plus $\theta = 0$. Lorsque les sphères s'écartent, l'inertie du système étant plus importante, le système ralentit la rotation de



FIGURE 1 – Régulateur de Watt d'une machine Ashton Frost, *cliché réalisé par Globbet, sous licence Creative Commons 4.0*.

Pour s'entraîner

Exercice 3

À partir de la figure ci-dessous, calculer la vitesse de rotation du manège (en $\text{tour} \cdot \text{min}^{-1}$).



Exercice 3

modélisation : 3 pts

Considérons une chaise assimilée à un point matériel de masse m suspendue à un fil inextensible de longueur $\ell = 5$ m. L'extrémité du fil est accroché à un disque de rayon $R = 4$ m en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre.

Du fait de la rotation, le siège s'incline et on note θ l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale Oz .

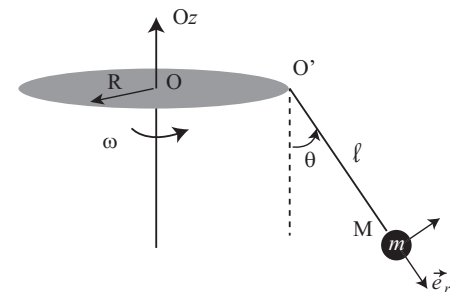


FIGURE 2 – Modélisation

Bilan des forces : 4 pts

Dans le référentiel du manège non-galiléen en rotation par rapport au sol. Le siège est soumis à

- son poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$;
- la tension du fil : $\vec{T} = -T \vec{e}_r$;
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 H \vec{M}$
- la force d'inertie de Coriolis. Celle-ci est nulle puisque le siège est immobile dans le référentiel tournant.

Résolution : 3 pts

La force d'inertie s'écrit dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2(R + \ell \sin \theta)(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

En l'absence de mouvement dans le référentiel tournant, la somme des forces est nulle :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie}$$

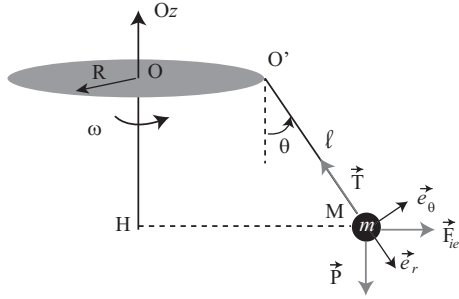


FIGURE 3 – Bilan des forces

Selon le vecteur $\vec{e}_\theta$, l'équation s'écrit :

$$0 = -mg \sin \theta + m\omega^2(R + \ell \sin \theta) \cos \theta$$

On en déduit que la vitesse de rotation vaut :

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{(R + \ell \sin \theta) \cos \theta}}$$

En considérant que l'angle est voisin de 45° , on en déduit que :

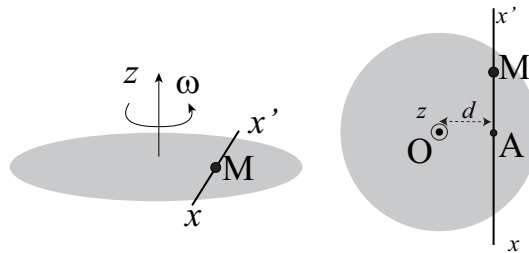
$$\omega \approx 1,2 \text{ rad.s}^{-1} \approx 11 \text{ tr.min}^{-1}$$

La vidéo permet de vérifier qu'un tour de manège s'effectue en 6 s environ soit 10 tours/min.

Exercice 4

Un plateau horizontal est en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

Un point matériel M peut se déplacer sans frottement sur un rail xx' infini fixé sur le plateau à une distance d de



l'axe Oz. Ce point est soumis à son poids, à la réaction du support et à une force de rappel $\vec{F} = -k \cdot \vec{AM}$ où A est le projeté orthogonale de O sur les rail. On notera $AM = x$.

- 1 - Appliquer le PFD et décrire toutes les forces (norme, direction, sens).
- 2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par x .
- 3 - Discuter des solutions possibles.

Exercice 4

1 - Dans le référentiel du plateau noté $\mathcal{R}'$ supposé non galiléen puisqu'en rotation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, le point matériel est soumis à

- son poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$;
- la réaction du support $\vec{R}$, sans composante selon $\vec{e}_x$ puisqu'il n'y a pas de frottement ;
- la force de rappel $\vec{F} = -kx \vec{e}_x$;
- la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{OM}$;
- la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega \dot{x} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta$.

2 - Par définition, l'accélération dans le référentiel du plateau est donnée par

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \ddot{x} \vec{e}_x$$

D'après la formule de composition des accélérations, on en déduit que

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} + m\omega^2 \vec{OM} + 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}|_{\mathcal{R}'}(M)$$

3 - La projection de la force d'inertie d'entraînement selon $\vec{e}_x$ donne :

$$\vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_x = m\omega^2 \vec{OM} \cdot \vec{e}_x = m\omega^2 (\vec{OA} + \vec{AM}) \cdot \vec{e}_x = m\omega^2 x$$

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ donne :

$$m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{F} + \vec{R}$$

La force d'inertie de Coriolis n'ayant pas de composante selon $\vec{e}_x$, on en déduit que la projection du principe fondamental de la dynamique selon $\vec{e}_x$ donne :

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - kx \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = 0$$

Cette équation est celle de l'oscillateur harmonique si $k/m > \omega^2$. Les solutions sont alors sinusoïdales. Avec $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$, les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

Le cas échéant, la solution est divergente en cosh et sinh. Avec $\Gamma = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$, les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A \cosh \Gamma t + B \sinh \Gamma t$$

Exercice 5

D'après Banque PT 05

Un sismomètre pendule est constitué d'une masse m reliée à un châssis solide du sol auquel on associe le référentiel $\mathcal{R}'$. Ce dernier vibre avec une amplitude $u = u_0 \cos \omega t$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. La liaison de m au bâti est modélisée par un comportement élastique de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , associé à un frottement fluide caractérisé par la constante γ .

1 - Déterminer la longueur Z_0 du ressort lorsque le système est au repos en l'absence de tremblement de terre.

2 - En raisonnant dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié au sol, on pose

$$Z(t) = z'(t) - Z_0$$

Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = -\ddot{u}$$

3 - Dans le cas de mouvements très rapides (de hautes fréquences), quel est le terme prépondérant (dans le premier membre). En déduire ce que représente $Z(t)$.

4 - Même question dans le cas de mouvements très lents.

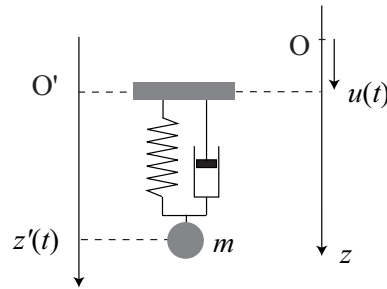


FIGURE 4 – Sismomètre.

Exercice 5

1 - Le système $\{m\}$ dans un référentiel galiléen associé au sol (en l'absence de tremblement de terre), est soumis

- à son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_z$;
- à la tension du ressort $\vec{T} = -k(z'(t) - \ell_0) \vec{e}_z$.

Lorsque la masse est immobile, $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$, on obtient $Z_0 = \ell_0 + mg/k$.

2 - Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la masse est soumise à

- son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_z$;
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(z'(t) - \ell_0) \vec{e}_z$;
- la force de frottement $\vec{f} = -\gamma \dot{z} \vec{e}_z$;
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\ddot{u} \vec{e}_z$;
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ puisque le référentiel est en translation.

La projection de la 2^e loi de Newton suivant $\vec{e}_z$ conduit à

$$m\ddot{z}' = mg - k(z'(t) - \ell_0) - \gamma \dot{z} - m\ddot{u}$$

En utilisant la variable Z , comme $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$, il vient

$$\ddot{Z} + \frac{\gamma}{m} \dot{Z} + \frac{k}{m} Z = -\ddot{u}$$

soit

$$\omega_0/Q = \gamma/m \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = k/m$$

3 - Pour des mouvements rapides, en utilisant la notation complexe, l'équation devient

$$-\omega^2 \underline{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \times j\omega \underline{Z} + \omega_0^2 \underline{Z} = \omega^2 \underline{u}$$

Le terme dominant est $\ddot{Z} \sim -\omega^2 Z$, ainsi $\ddot{Z} = -\ddot{u}$

soit

$$Z(t) = -u(t) + C^{\text{te}}$$

L'amplitude des oscillations représente donc le déplacement du sol à une phase π près.

4 - Pour des mouvements très lents, Ainsi, avec $\omega \ll \omega_0$, le terme prépondérant est donc $\omega_0^2 Z$. On en déduit que

$$Z(t) \approx -\ddot{u}/\omega_0^2$$

Ainsi $Z(t)$ représente l'accélération du sol. L'amplitude de Z est alors très faible. Pour réaliser un sismographe, il est donc nécessaire de fabriquer un oscillateur avec une pulsation propre la plus faible possible.

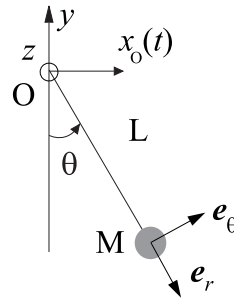
Exercice 6

D'après Centrale 08, oral CCP 18, 21

On considère un pendule simple constitué d'une masse M suspendue par un fil de longueur L . Le point de suspension O , attaché au sol, est soumis, par rapport au référentiel $\mathcal{R}_G$, galiléen fixe, à un déplacement horizontal d'origine sismique $x_O(t)$. on note $\mathcal{R}_S$ le référentiel lié au sol.

1 - Écrire l'équation du mouvement angulaire du pendule dans $\mathcal{R}_S$. La linéariser dans l'hypothèse des petits mouvements angulaires. En déduire l'équation différentielle reliant le déplacement $\theta(t)$ de la masse M à celui $x_O(t)$ du sol.

2 - Si $x_O(t) = X_0 \cos \omega t$, déterminer l'amplitude des oscillations $\Theta(\omega)$, où $\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t + \phi)$.



Exercice 6

1 - Plaçons nous dans le référentiel en translation $\mathcal{R}_S$. La masse M est alors soumise à

- son poids $\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$;
- la tension du fil $\vec{T} = -T \vec{e}_r$;
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\ddot{x}_0 \vec{e}_x = -m\ddot{x}_0(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$;
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ puisque $\mathcal{R}_S$ est en translation.

Comme il s'agit d'un pendule, appliquons le théorème du moment cinétique. Suivant $\vec{e}_z$ il vient

$$mL^2\ddot{\theta} = -MgL \sin \theta - mL\ddot{x}_0 \cos \theta$$

Dans l'hypothèse des petits angles, on a $\sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$. Il vient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = -\frac{\ddot{x}_0}{L}$$

2 - Utilisons la notation complexe

$$\underline{x}_0 = X_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{\theta} = \Theta e^{j\omega t}$$

On obtient le résultat suivant

$$\underline{\Theta} = \frac{-\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{X_0}{L} \text{ avec } \omega_0^2 = g/L$$

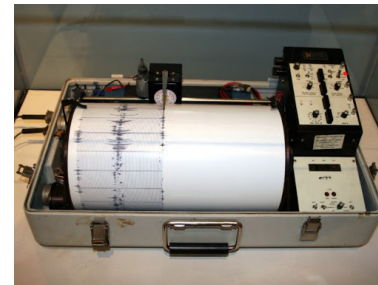
soit

$$\Theta = |\underline{\Theta}| = \frac{\omega^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \frac{X_0}{L}$$

Pour performer

Exercice 7

Un sismomètre de la société Geotech est constitué d'un pendule horizontal de masse m en M de longueur $O'M = \ell$. Il est libre de tourner autour du point O' , fixé, comme le point A sur un châssis (en grisé). Le point B mobile, est accroché à A par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 . On supposera l'existence d'une force de frottement $\vec{f}$ dont le moment en O' est $\vec{M}_{O'}(\vec{f}) = -\gamma \dot{\phi} \vec{e}_z$. On repère par ϕ l'angle entre $O'M$ et l'horizontal Ox' . À l'équilibre, $\phi = 0$ et $AB = L_1$.



1 - Déterminer la distance $L = AB$ en fonction de ϕ en fonction de ϕ , h et L_1 .

2 - En déduire l'expression du moment de la force de rappel due au ressort à l'équilibre.

3 - Déterminer L_1 en fonction de ℓ , m , g et L_0 .

4 - En présence d'un tremblement de terre, on note $y(t)$ la position de O' par rapport à un référentiel galiléen. Montrer que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au sol, l'angle ϕ vérifie

$$\ddot{\phi} + \alpha \dot{\phi} + \Theta(\phi) = \beta \ddot{y} \cos \phi$$

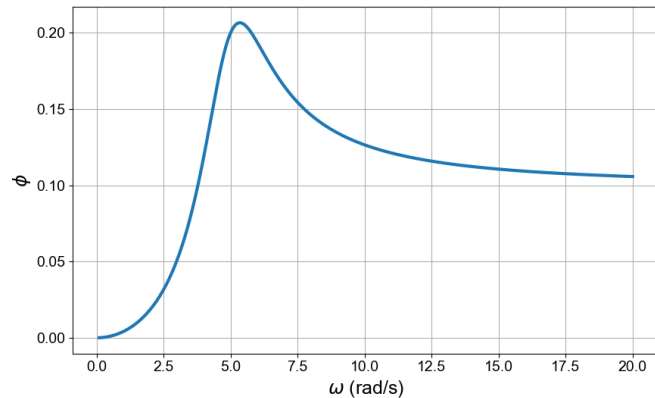
où Θ est une fonction de ϕ et α et β deux constantes que l'on déterminera.

5 - Linéariser cette équation pour des petites oscillations autour de la position d'équilibre $\phi = 0$, montrer que l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\phi} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = -\ddot{y}/\ell$$

6 - Si $y(t) = y_0 \cos \omega t$, déterminer l'amplitude Φ des oscillations telles que $\phi(t) = \Phi(\omega) \cos(\omega t + \psi)$.

7 - À partir de la figure ci-après, estimer les valeurs de y_0/ℓ , ω_0 et Q .



Exercice 7

1 - En utilisant les relations trigonométriques on obtient :

$$L - L_1 = h \sin \phi$$

2 - Par définition $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \vec{O'B} \wedge \vec{F}$. La force étant parallèle à AB, décomposons le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = (\vec{OA} + \vec{AB}) \wedge k(L - L_1)\vec{e}_{AB}$$

avec $\vec{e}_{AB} = -\cos \phi \vec{e}_{x'} - \sin \phi \vec{e}_{y'}$.

La projection de ce moment selon Oz donne :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = hk(L - L_0) \cos \phi \vec{e}_{z'}$$

3 - À l'équilibre, les moments se compensent,

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -mgl + hk(L - L_0) = 0$$

d'où

$$L_1 = L_0 + mgl/hk$$

4 - Le moment de la force d'inertie de Coriolis étant nulle car le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation, évaluons le moment de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = (\ell \cos \phi \vec{e}_{x'} - \ell \sin \phi \vec{e}_{y'}) \wedge (-m\ddot{y}\vec{e}_{y'}) = -m\ell\ddot{y} \cos \phi \vec{e}_{z'}$$

Évaluons le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m(\ell \cos \phi \vec{e}_{x'} + \ell \sin \phi \vec{e}_{y'}) \wedge (\dot{\phi} \ell \sin \phi \vec{e}_{x'} + \dot{\phi} \ell \cos \phi \vec{e}_{y'}) \\ &= m\ell^2 \dot{\phi} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f})$$

Projetons suivant $\vec{e}_{z'}$, il vient

$$-m\ell^2 \ddot{\phi} = hk(L - L_0) \cos \phi - m\ell\ddot{y} \cos \phi - mgl + \gamma \dot{\phi}$$

Remplaçons L en fonction de $\tan \phi$, on obtient

$$-m\ell^2 \ddot{\phi} = hk(L_1 + h \sin \phi - L_0) \cos \phi - m\ell\ddot{y} \cos \phi - mgl + \gamma \dot{\phi}$$

d'où

$$-m\ell^2 \ddot{\phi} = kh^2 \cos \phi \sin \phi - m\ell\ddot{y} \cos \phi$$

soit

$$\ddot{\phi} + \frac{\gamma}{m\ell^2} \dot{\phi} + \frac{kh^2}{m\ell^2} \cos \phi \sin \phi = \frac{1}{\ell} \ddot{y} \cos \phi$$

On en déduit que

$$\alpha = \frac{\gamma}{m\ell^2} \quad \text{et} \quad \beta = -1/\ell^2 \quad \text{et} \quad \Theta(\phi) = \frac{h^2 k}{m\ell^2} \cos \phi \sin \phi$$

5 - Linéarisons cette équation autour de la position d'équilibre $\sin \phi \sim \phi$ et $\cos \phi \sim 1$, il reste

$$\ddot{\phi} + \frac{\gamma}{m\ell^2}\dot{\phi} + \frac{kh^2}{m\ell^2}\phi = -\frac{1}{\ell}\ddot{y}$$

On identifie la pulsation propre et le facteur de qualité :

$$\omega_0 = \frac{h}{\ell}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = h\ell\frac{\sqrt{km}}{\gamma}$$

6 - En utilisant la notation complexe, il vient

$$(-\omega^2 + j\frac{\gamma}{m\ell^2}\omega + \frac{kh^2}{m\ell^2})\underline{\phi} = \frac{-\omega^2}{\ell}y_0e^{j\omega t}$$

Ainsi, l'amplitude de l'angle vérifie :

$$\Phi = |\underline{\phi}| = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(-\omega^2 + \frac{kh^2}{m\ell^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{m^2\ell^4}\omega^2}} \frac{y_0}{\ell}$$

7 - Par lecture graphique, on identifie les valeurs pour les hautes fréquences et à la résonance.

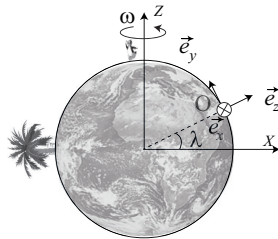
- Pour les hautes fréquences : $\frac{y_0}{\ell} \approx 0,10$;
- à la résonance : $\omega_0 \approx 5,3 \text{ ras.s}^{-1}$ et $Q = \frac{\phi_{max}}{y_0/\ell} = \frac{0,2}{0,1} \approx 2$

Exercice 8

D'après Oral Mines 19

Dès 1791, Guglielmini réalisa des expériences de chute libre à Bologne pour tester le caractère (non) galiléen du référentiel terrestre. Une balle de masse m était lancée sans vitesse initiale d'une hauteur $\vec{OM} = h_0 \vec{e}_z$ à la latitude $\lambda = 44,5^\circ$. On rappelle que l'attraction terrestre sur une masse m exerce une force $\vec{F} = -GM_T m/r^2 \vec{e}_z$ où r est la distance au centre de la Terre.

1 - Dans le référentiel terrestre tournant à la vitesse angulaire ω et muni du repère local $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer le poids d'un corps de masse m



à une altitude z en fonction de z, m, G, λ, M, R_T et ω .

2 - Simplifier cette expression dans le cas d'une chute d'une hauteur de 80 m environ. Montrer que le poids peut s'écrire sous la forme $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$ avec g une constante dont on donnera la valeur numérique.

3 - Pour une chute libre dans le référentiel terrestre, justifier que les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme.

$$\ddot{x} \approx -2\omega \cos \lambda \dot{z} \quad \text{et} \quad \ddot{z} \approx -g$$

4 - La déviation vers l'est est un phénomène physique correspondant au fait qu'un corps en chute libre ne suit pas exactement la direction de la pesanteur, mais est légèrement dévié vers l'est. Justifier cette affirmation à partir des équations précédentes.

5 - Montrer que pour une chute de hauteur h_0 , la position de l'impact vérifie : $x = \frac{2\sqrt{2}\omega \cos \lambda h_0^{3/2}}{3g^{1/2}}$

6 - Le déplacement mesuré à Bologne par Guglielmini était de 1,9 cm pour une hauteur de 78,3 m. Ce résultat vous paraît-il cohérent ?

Données : $R_T = 6400 \text{ km}$; la masse de la Terre : $M = 6.10^{24} \text{ kg}$; la constante de gravitation $G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$.

Exercice 8

1 - Le système {balle} dans le référentiel terrestre non galiléen est soumis

- La force de gravitation $\vec{F} = -G \frac{Mm}{(R_T + z)^2} \vec{e}_z$;
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2(R_T + z) \cos \lambda (-\sin \lambda \vec{e}_y + \cos \lambda \vec{e}_z)$;
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\omega((\cos \lambda v_z - \sin \lambda v_y) \vec{e}_x + \sin \lambda v_x \vec{e}_y - \cos \lambda v_x \vec{e}_z)$

L'application de la 2° loi de Newton permet d'écrire

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -2m\omega v_z \cos \lambda + 2m\omega \sin \lambda v_y \\ m\dot{v}_y = -mR_T\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda - 2m\omega \sin \lambda v_x \\ m\dot{v}_z = -G \frac{Mm}{(R_T + z)^2} + mR_T\omega^2 \cos^2 \lambda + 2m\omega \cos \lambda v_x \end{cases}$$

2 - En simplifiant par m et avec $z \ll R_T$ il vient

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -2\omega v_z \cos \lambda + 2\omega \sin \lambda v_y \\ \dot{v}_z = -G \frac{M}{R_T^2} + R_T \omega^2 \cos^2 \lambda + 2\omega \cos \lambda v_x \end{cases}$$

Dans l'évolution de v_x , on se doute que la vitesse verticale v_z sera plus importante que la vitesse horizontale v_y . Ainsi l'équation d'évolution de v_x devient

$$\dot{v}_x = -2\omega v_z \cos \lambda$$

Pour l'évolution de v_z , Le terme $R_T \omega^2$ est négligeable devant GM/R_T^2 :

$$R_T \omega^2 \sim 3.10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \text{ et } GM/R_T^2 \sim g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

Pour que $2\omega v_x$ soit négligeable devant GM/R_T^2 , il faut que :

$$v_x \ll G \frac{M}{2\omega R_T^2}$$

soit
$$v_x \ll 7.10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

Cette approximation étant tout à fait crédible, l'équation revient à

$$\dot{v}_z = -G \frac{M}{R_T^2}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega \cos \lambda \dot{z} \\ \ddot{z} = -GM/R_T^2 \end{cases}$$

3 - Déterminons le temps de chute t_C en intégrant deux fois l'équation suivant $\vec{e}_z$: $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Avec $z(t_C) = 0$, $t_C = \sqrt{2h/g}$, incorporons cette valeur dans l'expression de x :

$$\ddot{x} = 2\omega \cos \lambda gt \quad \text{soit} \quad x = \frac{1}{3}\omega \cos \lambda gt^3$$

d'où
$$x(t_C) = \frac{1}{3}\omega \cos \lambda g(\sqrt{2h/g})^3$$

soit
$$x(t_C) = \frac{2\sqrt{2}\omega \cos \lambda h_0^{3/2}}{3g^{1/2}} = 1,1 \text{ cm}$$

Compte tenu des mesures de l'époque, le résultat peut paraître satisfaisant.