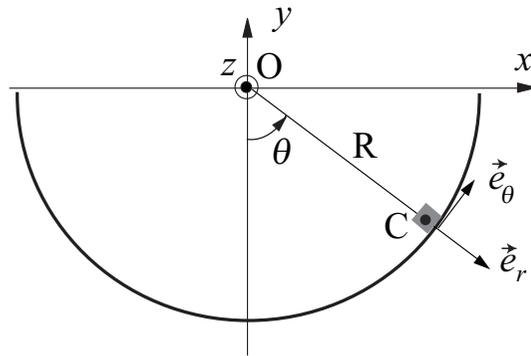


### Exercice 1

D'après CCP 17

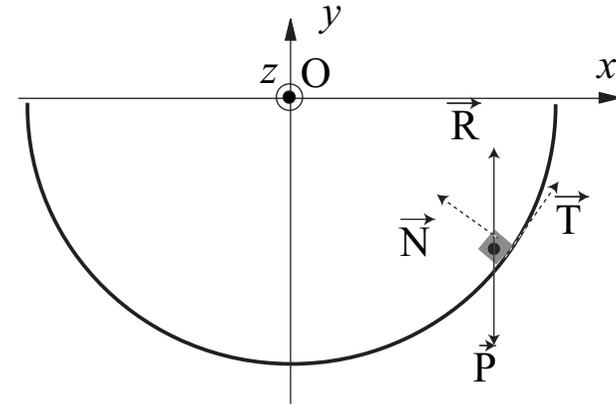
Un grain de sable de masse  $m$  assimilé à un point matériel glisse avec frottement dans une cavité sphérique de rayon  $R$ . On repère par  $\theta$  la position du centre d'inertie de l'objet, et on note  $f$  le coefficient de frottement statique que l'on supposera égal au coefficient de frottement dynamique.



- 1 - Effectuer un schéma modèle en faisant figurer les forces appliquées à la masse lorsque celle-ci est à immobile avec  $\theta > 0$ .
- 2 - Déterminer  $\theta_0$  pour qu'il y ait glissement.
- 3 - On suppose  $\theta(t = 0) > \theta_0$ , en précisant les hypothèses utilisées, montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0$$

- 4 - Préciser l'intervalle de temps sur lequel l'équation est valable. On note  $t'_1$  le temps pour lequel se termine la première phase du mouvement. Exprimer  $t'_1$  et  $\dot{\theta}(t'_1)$ .
- 5 - On s'intéresse à la première phase du mouvement où  $\dot{\theta} \leq 0$ . Déterminer  $\theta(t)$  en supposant que  $\theta$  est de faible amplitude. On considèrera les conditions initiales suivantes :  $\theta(t = 0) = \theta_1$  et  $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ .
- 6 - Pour  $t > t'_1$  et  $\dot{\theta} > 0$ , déterminer la nouvelle expression de  $\theta(t)$ .
- 7 - On note  $\Delta\theta$  la perte d'amplitude au bout d'une période. Déterminer son expression.
- 8 - Représenter  $\theta(t)$ . Commenter.



- 2 - La masse étant immobile :

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad N = mg \cos \theta \quad \text{et} \quad T = mg \sin \theta$$

À la limite du glissement, on peut écrire :

$$T = f \times N$$

On en déduit que :

$$\tan \theta_0 = f$$

- 3 - Dans le référentiel galiléen associé au support le PFD selon  $\vec{e}_\theta$  donne :

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + T$$

En présence de glissement :

$$T = fmg \cos \theta$$

D'après l'approximation des petits angles, au premier ordre en  $\theta$  :

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{et} \quad \cos \theta \approx 1$$

On en déduit que :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\theta + fmg$$

Avec  $g/R = \omega_0^2$ , et  $\tan \theta_0 \approx \theta_0 = f$ , il vient :

### Exercice 1

- 1 - On suppose que la masse est immobile. Les forces appliquées sont le poids et la réaction du support :

- $\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$
- $\vec{R} = -N \vec{e}_r + T \vec{e}_\theta$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0$$

4 - La période du mouvement est de :  $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g}$ , on en déduit que le mouvement étant valable tant que  $\dot{\theta} \leq 0$ , il est valable sur une demi-période du mouvement, soit :

$$t'_1 = T_0/2 = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

5 - La solution générale de cette équation est :

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \theta_0$$

L'application des conditions initiales permet d'obtenir :

$$\theta(t) = (\theta_I - \theta_0) \cos \omega_0 t + \theta_0$$

6 - En inversant le sens de parcours, on inverse la force de frottement, il vient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\omega_0^2 \theta_0$$

La solution générale de cette équation est :

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \theta_0$$

La continuité de  $\theta$  et sa dérivée en  $t'_1$ , permet d'obtenir A et B :

$$\theta(t'_1) = A \cos \omega_0 t'_1 + B \sin \omega_0 t'_1 - \theta_0 = (\theta_I - \theta_0) \cos \omega_0 t'_1 + \theta_0 \quad \text{et} \quad -\omega_0 B = 0$$

On obtient alors :

$$A \times (-1) - \theta_0 = (\theta_I - \theta_0) \times (-1) + \theta_0 \quad \text{soit} \quad A = \theta_I - 3\theta_0$$

$$\theta(t) = (\theta_I - 3\theta_0) \cos \omega_0 t - \theta_0$$

7 - L'amplitude du mouvement est initialement de  $\theta_I - \theta_0$ . Au bout d'une demi-période, l'amplitude n'est plus que de  $\theta_I - 3\theta_0$ , soit une perte de  $2\theta_0$ . La perte d'amplitude au bout d'une période est donc de

$$\Delta\theta = 4\theta_0$$

8 - On attend la représentation suivante avec :

- l'enveloppe de l'amplitude décroît linéairement
- la valeur asymptotique n'est pas nulle mais comprise entre  $\pm\theta_0$ .

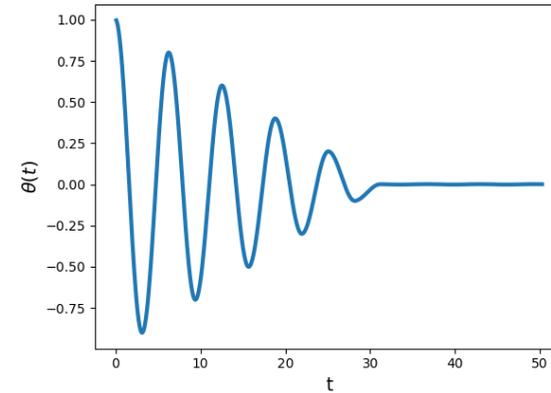


FIGURE 1 – Oscillations avec frottement solide

### Exercice 2

*D'après Oral Mines-Telecom 22*

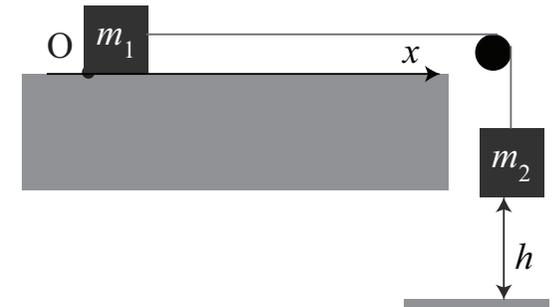
On considère le dispositif ci-contre.

Le fil reliant les deux masses est inextensible. Il n'y a pas de pertes dues à la poulie. À  $t = 0$ , le fil entre les deux masses est tendu.

On lâche la masse  $m_2$  d'une hauteur  $h$ . La masse  $m_1$  s'arrête après avoir parcouru une distance  $h + d$  sur le plan horizontal.

1 - Déterminer une condition sur  $m_2$  et  $m_1$  et  $f$  pour qu'il y ait mouvement.

2 - À l'aide d'un théorème énergétique, Déterminer la vitesse  $V_1$  du mobile (1) à la fin de la première phase du mouvement lorsque le fil reste tendu.



3 - En Déduire le coefficient de frottement solide  $f$  entre la table et la masse  $m_1$  en fonction de  $m_1, m_2, h$  et  $d$ .

### Exercice 2

1 - Dans le référentiel galiléen associé au sol, la masse  $m_1$  est soumise à

- $\vec{R}_1 = -T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_y$  la réaction du support ;
- son poids  $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{e}_y$  ;
- la force de la masse  $m_2$  :  $\vec{F} = m_2 g \vec{e}_x$

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -T_1 + F \\ 0 = -m_1 g + N_1 \end{cases}$$

La mise en mouvement est pour  $T_1 = f N_1$

soit

$$f m_1 g < m_2 g$$

2 - Déterminons la vitesse par une méthode énergétique. Les seules forces à travailler sont le poids de la masse  $m_2$  et la force tangentielle de contact entre le support et  $m_1$ . Le poids sur  $m_1$  et la composante normale de contact ne travaillent pas car elles sont perpendiculaires au déplacement.

Au bout d'une distance notée  $h$  pour les mobiles (1) et (2) sont passés d'une vitesse nulle à une vitesse  $V_1$ . La loi de l'énergie cinétique entre l'état (A) (vitesses : 0, position O) et l'état (B) (vitesse :  $V_1$ , position  $h$ ) :

$$E_{C,B} - E_{C,A} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{R} d\vec{O}\vec{M}_1 + \int_{(A)}^{(B)} m_2 \vec{g} d\vec{O}\vec{M}_2$$

En remplaçant la force tangentielle par  $T = f m_1 g$ , il vient :

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_1^2 - 0 - 0 = -f m_1 g \times h + m_2 g h$$

On en déduit que :

$$V_1^2 = 2 \frac{-f m_1 g \times h + m_2 g h}{m_1 + m_2}$$

3 - La distance d'arrêt notée  $d$  pour une vitesse initiale  $v_0$  est donnée par la loi de l'énergie cinétique entre l'état (1) (vitesse :  $V_1$ , position O) et l'état (2) (vitesse : 0, position  $d$ ) :

$$E_{C,2} - E_{C,1} = \int_{(1)}^{(2)} \text{Rd}\vec{O}\vec{M} = -T \times d = -f M g \times d$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = -f m_1 g \times d \quad \text{soit} \quad V_1^2 = 2 f g d$$

Grâce à l'expression de la vitesse obtenue à la question précédente, on obtient :

$$2 \frac{-f m_1 g \times h + m_2 g h}{m_1 + m_2} = 2 f g d$$

En isolant la valeur de  $f$ , on obtient :

$$f \left( g d + g h \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2 g h}{m_1 + m_2}$$

Après simplification par  $g$  et  $m_1 + m_2$ , il vient :

$$f = \frac{m_2 h}{d(m_1 + m_2) + h m_1}$$

Dans une avalanche, une masse de neige se détache sur une pente et dévale en entraînant avec elle de la matière supplémentaire. Il en résulte une amplification qui conduit à un phénomène violent même à partir d'un déséquilibre faible.

On considère un bloc de neige de masse  $m$  reposant sur un plan incliné dont la pente est repérée par l'angle  $\alpha$  (figure 1). Le contact entre la neige et ce plan, décrit par les lois de Coulomb sur le frottement, est caractérisé par des coefficients de frottement statique  $\mu_s$  et dynamique  $\mu_d$ . On rappelle que  $\mu_d \leq \mu_s$ . On note  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  l'accélération de la pesanteur.

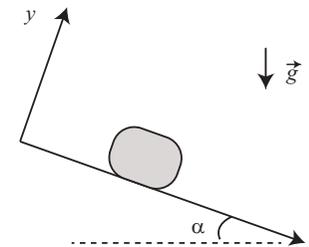


FIGURE 2 – Bloc de neige sur une pente

1 - Montrer que l'équilibre est possible tant que  $\alpha \leq \alpha_c$  et exprimer l'angle critique  $\alpha_c$ .

La masse de neige en équilibre sur une pente d'angle  $\alpha_c$  subit une légère perturbation qui lui donne une vitesse initiale  $v_0 \vec{u}_x$ ,  $v_0 > 0$ .

2 - Exprimer sa vitesse ultérieure  $v(t)$  et son énergie cinétique  $\mathcal{E}_c(t)$ .

Type de neige :	$\mu_s$	$\mu_d$
neige fraîche	10	0,3
neige en gobelets	1,2	0,7
neige à grains ronds	1,2	0,4

L'énergie acquise sert à mettre en mouvement de nouveaux blocs de neige, conduisant à l'amplification de l'avalanche. Les valeurs approximatives de  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont données dans le tableau ci-dessous pour différents types de neige.

3 - D'après la question précédente, quel type de neige conduit aux avalanches les plus violentes ?

Animée d'une vitesse  $v_1$ , la masse de neige arrive dans une région où l'angle  $\alpha$  prend une valeur plus faible, constante.

4 - À quelle condition portant sur  $\alpha$  le mouvement est-il ralenti puis stoppé ?

### 1 - Détermination du coefficient de frottement

La question suivante nécessite une prise d'initiative. Le soin et la qualité des explications seront pris en compte dans la correction.

1 - À partir du cliché ci-dessous, déterminer la valeur de  $\mu_d$ .

### 2 - Modèle de frottement sur sol rugueux

Lorsque l'avalanche rencontre dans sa course un sol rugueux, elle est soumise à de nouvelles forces de frottement dont on étudie ici une modélisation (figure 6).

La masse de neige en mouvement est assimilée à un parallélépipède rectangle d'épaisseur  $d$  (selon  $y$ ), de longueur  $l$  (selon  $x$ ) et de largeur  $L$  (selon  $z$ ). Le contact avec le sol s'effectue donc sur un rectangle d'aire  $S = Ll$ .

L'avalanche est formée de paquets de neige sphériques de masse  $m_0$  descendant la ligne de plus grande pente avec une vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}_x$ . Ces blocs sont empilés en couches distantes de  $b$  perpendiculairement à la pente. Dans une couche donnée, parallèle au plan  $(Oxz)$ , les blocs sont en moyenne distants de  $a$  selon les directions  $x$  et  $z$ .

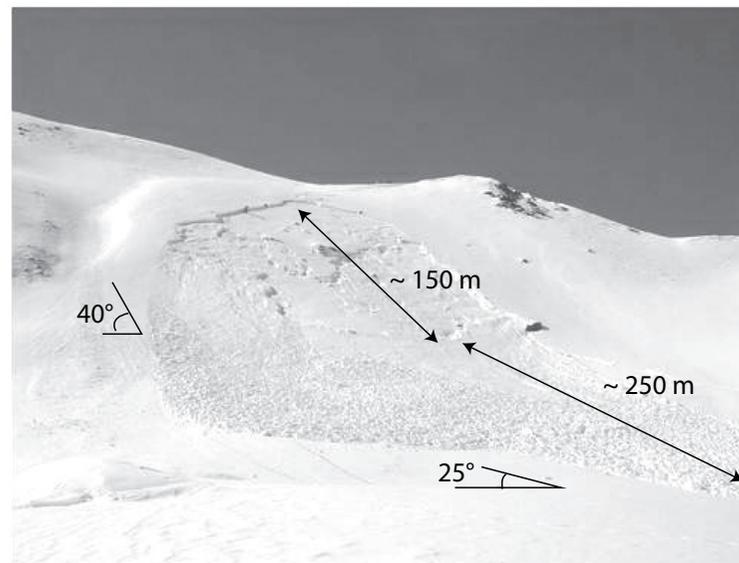


FIGURE 3 – Avalanche de plaque de neige au Hanengretji au-dessus de Davos (Suisse). L'avalanche a été déclenchée le 18 mars 2006 par un snowboarder au cours d'une descente, mais il a pu sortir de la zone de l'avalanche (photo : P. Weilenmann, 18.03.2006).

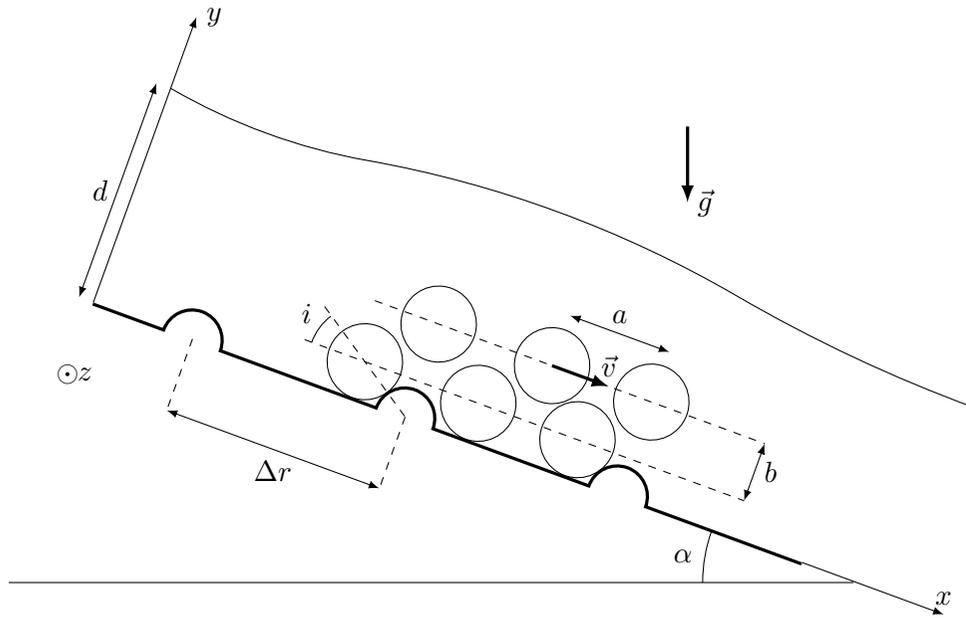


FIGURE 4 – Modèle d’avalanche sur sol rugueux

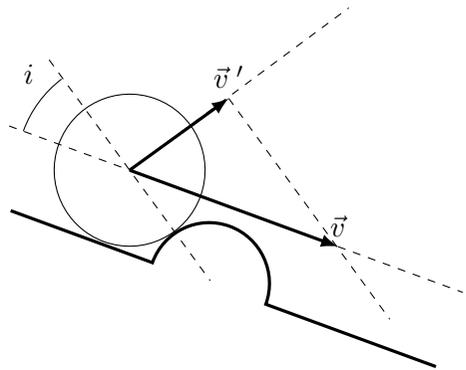


FIGURE 5 – Choc d’un bloc sur une aspérité

Au niveau du sol, ils rencontrent des aspérités assimilées à des cylindres de section circulaire et d’axe parallèle à  $Oz$ , séparés d’une distance  $\Delta r$ . Les chocs correspondant à ces rencontres, caractérisés par l’angle d’incidence  $i$ ,

sont supposés mous (figure 7) : après l’impact, le vecteur vitesse du bloc  $\vec{v}'$  est tangent à la surface de l’aspérité cylindrique au point de contact. D’autre part, la composante tangentielle de la vitesse est conservée dans le choc.

- 1 - Un bloc se déplaçant selon  $x$  avec une vitesse moyenne  $\vec{v}$ , exprimer la fréquence  $f$  des chocs qu’il subit.
- 2 - Quel est le nombre moyen  $N_1$  de blocs dans la couche en contact avec le sol ?
- 3 - Combien de chocs l’avalanche dans son ensemble subit-elle, pendant  $dt$  ? On notera  $dN$  ce nombre.
- 4 - Pendant un choc, un bloc subit un changement de quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}_0$ . Déterminer sa projection  $\Delta p_{0x}$  sur l’axe  $x$ .
- 5 - Soit  $\vec{P} = P \vec{e}_x$  la quantité de mouvement de l’avalanche. En déduire la variation de quantité de mouvement  $dP_{\text{chocs}}$  causée par les chocs durant  $dt$ .
- 6 - En déduire que la force de frottement rugueux s’exerçant sur l’avalanche est :

$$\vec{F}_{\text{rug}} = -\frac{m_0 S v^2 \cos^2 i}{a^2 \Delta r} \vec{e}_x$$

- 7 - Soit  $m$  la masse totale de l’avalanche. Montrer que  $\vec{F}_{\text{rug}}$  se met sous la forme :

$$\vec{F}_{\text{rug}} = -\frac{mgv^2}{\xi d} \vec{e}_x$$

en donnant l’expression du paramètre de rugosité  $\xi$  en fonction de  $g$ ,  $\Delta r$ ,  $b$  et  $i$ .

- 8 - Expliquer pourquoi  $\xi$  dépend de la nature du sol sur lequel l’avalanche s’écoule.
- 9 - Certains paramètres du modèle pourraient dépendre de la vitesse, de sorte que  $\xi$  en dépendrait aussi. Lesquels selon vous ? **Exercice 3**

1 - On se place dans le référentiel du plan incliné supposé galiléen. Les forces s’exerçant sur le bloc de neige sont :

- Son poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg [\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y]$  ;
- la réaction du sol :  $\vec{R} = R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_y$ .

Supposons le bloc de neige en équilibre. On devra alors avoir simultanément :

- La somme des forces nulles :  $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}$  ;

- $\frac{|R_T|}{|R_N|} < \mu_s$ .

c'est à dire :

$$\begin{aligned} 0 &= R_T + mg \sin \alpha \\ 0 &= R_N - mg \cos \alpha \end{aligned}$$

et

$$\frac{|R_T|}{|R_N|} = |\tan \alpha| < \mu_s$$

L'équilibre n'est donc possible que si :

$$|\alpha| < \alpha_c \text{ avec } \alpha_c = \arctan \mu_s$$

2 - La masse de neige est placée sur la pente d'angle  $\alpha_c$  avec une vitesse initiale  $v_0 \vec{u}_x$  non nulle. La première phase du mouvement est donc une phase de glissement où on aura :

$$|R_T| = \mu_d |R_N|$$

Comme au cours d'une phase de glissement, la vitesse ne peut s'annuler qu'à la fin, la vitesse au cours de cette première phase sera constamment dans le sens de  $+\vec{u}_x$  et donc  $R_T$  sera négatif. La loi de Coulomb s'écrira alors :

$$R_T = -\mu_d |R_N|$$

Comme à la question précédente, on se place dans le référentiel du plan incliné supposé galiléen. Les forces s'exerçant sur le bloc de neige sont toujours :

- Son poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg [\sin \alpha_c \vec{e}_x - \cos \alpha_c \vec{e}_y]$  ;
- la réaction du sol :  $\vec{R} = R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_y$ .

Le PFD appliqué au système {le bloc de neige} s'écrit alors :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{u}_x = mg [\sin \alpha_c \vec{e}_x - \cos \alpha_c \vec{e}_y] + R_T \vec{e}_x + R_N \vec{e}_y$$

ce qui conduit, par projection sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ , à :

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg \sin \alpha_c + R_T \\ 0 &= -mg \cos \alpha_c + R_N \end{aligned}$$

et donc, comme  $R_T = -\mu_d |R_N|$  :

$$\frac{dv}{dt} = g (\sin \alpha_c - \mu_d \cos \alpha_c) = g \cos \alpha_c (\mu_s - \mu_d) > 0$$

Le mouvement est donc uniformément accéléré et la première phase de glissement n'a pas de fin. Une intégration immédiate donne alors la vitesse :

$$v(t) = v_0 + g \cos \alpha_c (\mu_s - \mu_d) t$$

et l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [v_0 + g \cos \alpha_c (\mu_s - \mu_d) t]^2$$

3 - La "violence" d'une avalanche est liée à la quantité d'énergie (cinétique) qu'elle est capable d'accumuler pour un parcours donné. Autrement dit, une avalanche sera d'autant plus violente que l'accélération prise par les blocs de neige en train de glisser sera grande. Dans le cadre du modèle étudié et avec les données numériques disponibles, on peut alors construire le tableau de la figure 5 qui compare ces accélérations :

Type de neige :	$\mu_s$	$\mu_d$	$\alpha_c$ (°)	Accélération (m.s <sup>-2</sup> )
neige fraîche	10	0,3	84	9,5
neige en gobelets	1,2	0,7	50	3,14
neige à grains ronds	1,2	0,4	50	5,0

FIGURE 6 – Comparaison des accélérations des blocs de neige en train de glisser.

C'est donc la neige fraîche qui est la plus dangereuse ( $\mu_d$  est le plus faible coefficient. Son accélération est presque égale à celle de la pesanteur.

4 - Pour que le mouvement soit ralenti puis stoppé sur une pente d'angle  $\alpha$ , il faut que la vitesse soit une fonction décroissante du temps, c'est à dire que :

$$\frac{dv}{dt} = g (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu_d) < 0$$

c'est à dire que :

$$\tan \alpha < \mu_d$$

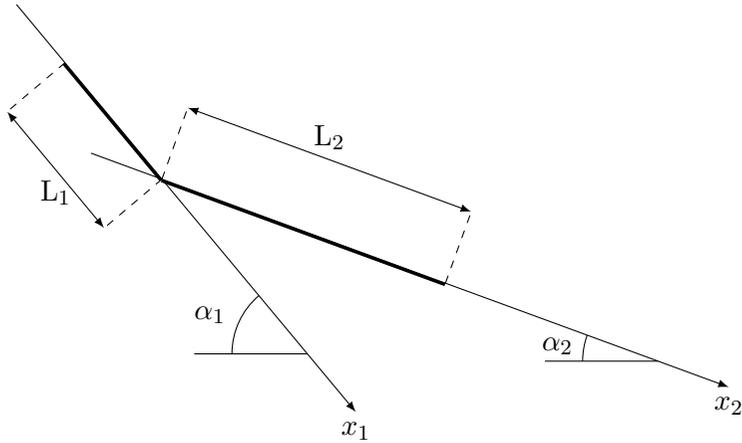


FIGURE 7 – Détermination de  $\mu_d$

### 3 - Détermination du coefficient de frottement

1 - Effectuons un schéma modèle :

Soit  $L_1$  la longueur parcourue avant le changement de pente (inclinaison  $\alpha_1$ ) et  $L_2$  la longueur parcourue après (inclinaison  $\alpha_2$ ) (figure 6). On suppose que  $\tan \alpha_1 > \mu_d > \tan \alpha_2$  pour que l'avalanche commence par accélérer sur la pente la plus forte puis ralentisse et s'arrête sur la pente la plus faible.

Sur la pente d'inclinaison  $\alpha_1$ , l'accélération est constante et vaut  $\vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_{x_1}$  avec :

$$a_1 = g(\sin \alpha_1 - \mu_d \cos \alpha_1) = g \cos \alpha_1 (\tan \alpha_1 - \mu_d) > 0$$

En négligeant la vitesse initiale  $v_0$  qui déclenche l'avalanche, la vitesse  $v_{1,max}$  est atteinte au moment du changement de pente. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_{1,max}^2 = mg \sin \alpha_1 \times L_1 - \mu_d mg \cos \alpha_1 L_1$$

On obtient alors :

$$v_{1,max} = \sqrt{2a_1 L_1} = \sqrt{2L_1 g \cos \alpha_1 (\tan \alpha_1 - \mu_d)}$$

De même, sur la pente d'inclinaison  $\alpha_2$ , en supposant la continuité de la norme de la vitesse au changement de pente, la distance parcourue jusqu'à l'arrêt

complet sera  $L_2$ , le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$0 - \frac{1}{2}mv_{1,max}^2 = mg \sin \alpha_2 \times L_2 - \mu_d mg \cos \alpha_2 L_2$$

En isolant  $\mu_d$ , il vient :

$$\mu_d = \frac{L_1 \sin \alpha_1 + L_2 \sin \alpha_2}{L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1 + \frac{L_2}{L_1} \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \frac{L_2}{L_1} \cos \alpha_2}$$

Ainsi, la mesure conjointe du rapport  $\frac{L_2}{L_1}$  des distances parcourues et des angles d'inclinaison  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  permet d'estimer  $\mu_d$ . En utilisant les données, on obtient :

$$\mu_d \approx 0,6$$

On vérifie que cette valeur est compatible avec les données :

$$\tan \alpha_2 = 0,4 < \mu_d < \tan \alpha_1 = 0,8$$

Bilan des points :

- schéma modèle : 1 pt
- mouvement sur pente 1 avec PFD ou TEC 2 pts
- mouvement sur pente 2 avec PFD ou TEC 2 pts
- valeur numérique : 1 pt
- validation du résultat : 1 pt

### 4 - Modèle de frottement sur sol rugueux

1 - Puisque les obstacles sont séparés d'une distance  $\Delta r$  le long de l'axe  $Ox$  et que le bloc de neige se déplace à la vitesse moyenne  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ , il y aura un temps moyen  $\tau = \frac{\Delta r}{v}$  entre deux chocs. Ceux-ci se produiront donc avec une fréquence moyenne :

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{\Delta r}$$

2 - Un bloc étant en moyenne séparé de ses voisins d'une distance  $a$ , il y aura en moyenne 1 bloc dans une surface d'aire  $a^2$  en contact avec le sol. Puisque la surface de contact envisagée a une aire  $S = Ll$ , le nombre moyen de blocs dans la couche en contact avec le sol sera :

$$\boxed{N_1 = \frac{S}{a^2}}$$

3 - Pour un bloc, il y a  $f \times dt$  chocs pendant  $dt$ . On aura alors, pendant  $dt$ , un nombre de chocs égal à :

$$dN = N_1 \frac{dt}{\tau} = N_1 f dt$$

4 -  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  forment entre eux l'angle  $\pi/2 - i$ . Donc :

$$\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = v \sin i$$

et :

$$\vec{v}' \cdot \vec{e}_x = [v \sin i] \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = v \sin^2 i$$

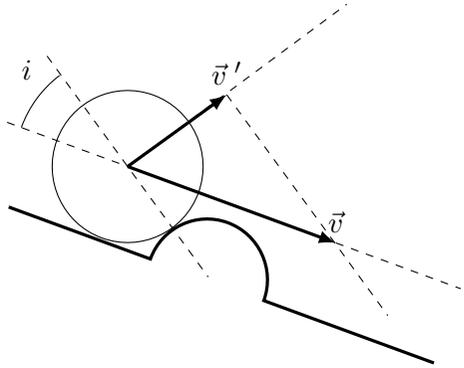


FIGURE 8 – Choc d'un bloc sur une aspérité

On en déduit la composante selon  $x$  de la variation de la quantité de mouvement d'un bloc de masse  $m_0$  au cours d'un choc :

$$\Delta p_{0x} = [m_0 \vec{v}' - m_0 \vec{v}] \cdot \vec{e}_x = m_0 [\vec{v}' \cdot \vec{e}_x - v] = -m_0 v [1 - \sin^2 i]$$

c'est à dire :

$$\boxed{\Delta p_{0x} = -m_0 v \cos^2 i}$$

5 - Pendant  $dt$ , il y a  $dN = N_1 f dt$  chocs dans l'avalanche. La quantité de mouvement  $\vec{P} = P \vec{u}_x$  de l'avalanche n'ayant qu'une composante selon  $\vec{e}_x$ ,

sa variation pendant  $dt$  due aux chocs sur les aspérités sera la somme des composantes  $\Delta p_{0x}$  des  $dN$  chocs, soit :

c'est à dire, en remplaçant  $N_1$  et  $f$  par leurs valeurs :

$$\boxed{dP_{\text{chocs}} = -m_0 \frac{S}{\Delta r} \left(\frac{v}{a} \cos i\right)^2 dt}$$

6 - La variation  $dP_{\text{chocs}}$  correspondant à la variation de la quantité de mouvement due aux chocs sur les aspérités, on en déduit que l'action de ces chocs sur l'avalanche peut être représentée par une force  $\vec{F}_{\text{rug}}$  telle que :

$$\vec{F}_{\text{rug}} = \frac{dP_{\text{chocs}}}{dt} \vec{e}_x$$

c'est à dire :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{rug}} = -m_0 \frac{S}{\Delta r} \left(\frac{v}{a} \cos i\right)^2 \vec{e}_x}$$

7 - Chaque bloc de masse  $m_0$  occupe en moyenne un volume  $ba^2$ . Il y a donc  $\frac{Sd}{ba^2}$  blocs dans l'avalanche et celle-ci a donc une masse :

$$m = \frac{Sd}{ba^2} m_0$$

La force de frottement rugueux s'exprime donc en fonction de la masse totale  $m$  de l'avalanche sous la forme :

$$\vec{F}_{\text{rug}} = m \frac{ba^2}{Sd} \frac{S}{\Delta r} \left(\frac{v}{a} \cos i\right)^2 \vec{e}_x$$

c'est à dire :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{rug}} = -\frac{mgv^2}{\xi d} \vec{e}_x \text{ avec } \xi = \frac{g\Delta r}{b \cos^2 i}}$$

8 -  $\xi$  dépend de la nature du sol par l'intermédiaire de  $i$  et de  $\Delta r$ .

9 - Il est fort probable que la densité de la neige en écoulement dépende de la vitesse. Donc  $b$  en dépendrait ainsi que  $\xi$ .

# Présentation

On dépose sur une table, une feuille de papier et sur la feuille de papier un téléphone portable.

- Si on tire « suffisamment doucement » sur la feuille de papier, le téléphone portable restera solidaire de la feuille et sera entraîné par lui.
- Si on tire « suffisamment vite », il est possible de retirer la feuille de papier sans faire tomber le téléphone.



FIGURE 9 – On n'est pas des cobayes.

## I. Résolution ...

Les notations employées seront celles du schéma ci-dessous où  $\vec{F}_{op}$  est la force de l'opérateur exercée sur la feuille. On notera  $m$  la masse de la feuille,  $L$  sa plus grande longueur et  $M$  la masse du téléphone posé à l'extrémité de la feuille.

- 1 - Estimer le coefficient de frottement d'un téléphone sur du papier.
- 2 - Quelle force minimale faut-il exercer sur la feuille pour que le téléphone glisse par rapport à la feuille ?

*On pourra supposer que le coefficient de frottement téléphone-feuille est identique au coefficient table-feuille.*

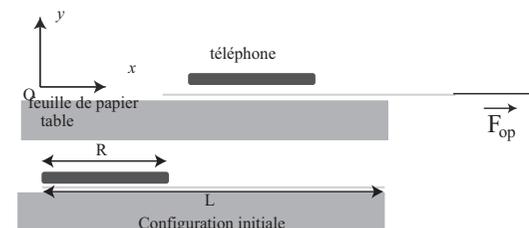


FIGURE 10 – Notations

- 3 - On note  $R$  la taille d'un téléphone. Montrer que le temps pour lequel le centre de gravité du téléphone n'est plus en contact avec la feuille peut se mettre sous la forme :

$$\tau \approx \sqrt{\frac{2mR}{F_{op} - 2fMg}}$$

- 4 - Déterminer la position et la vitesse du téléphone en  $t = \tau$
- 5 - Exprimer la force nécessaire pour que le téléphone ne tombe pas de la table. Conclure.

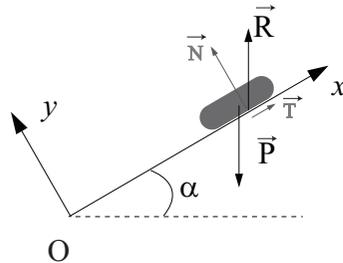
## II. Barème

Vous remarquerez que le barème n'est pas associé aux questions énoncées ci-dessus. La notation tiendra surtout compte de la façon dont le problème est abordé. Le barème est adapté non pas à l'obtention d'une solution complète mais au raisonnement et à sa rédaction.

Domaine	compétences
S'approprier	Faire un schéma modèle avec les forces (1 pt) Définir le systèmes (2 pts) Relier les forces à l'aide de la 3 <sup>e</sup> loi de Newton(1 pts)
Analyser	Définir la condition de glissement (1 pt) Décomposer les différentes phases du mouvement (2 pts)
Réaliser	Evaluer un coefficient de frottement (2 pts) Appliquer la 2 <sup>e</sup> loi de Newton (3 pts) Définir la position du téléphone une fois la feuille retirée (3 pts) Définir le mouvement du téléphone une fois la feuille retirée (2 pts)
Valider	Commenter la valeur numérique du coefficient de frottement (1 pt) Commenter les valeurs numériques de la force. (2 pts)

#### Exercice 4

1 - En posant un téléphone portable sur une cahier, en inclinant celui-ci, il est possible d'évaluer l'angle à partir duquel le téléphone se met en mouvement.



Cet angle est relié au coefficient de frottement téléphone-carton et vérifie :

$$f = \tan \alpha$$

L'incertitude peut s'effectuer en prenant plusieurs mesures ou en propageant l'incertitude de l'angle au coefficient de frottement

A.N. :  $f = 0,27 \pm 0,09$

2 - Dans le référentiel terrestre supposé galiléen le téléphone est soumis à

- son poids  $\vec{P}_{tel} = -Mg\vec{e}_y$  ;
- la réaction de la feuille  $\vec{R}_{feuille} = T_{feuille}\vec{e}_x + N_{feuille}\vec{e}_y$  ;

L'application de la 2<sup>e</sup> loi de Newton au téléphone nous donne :

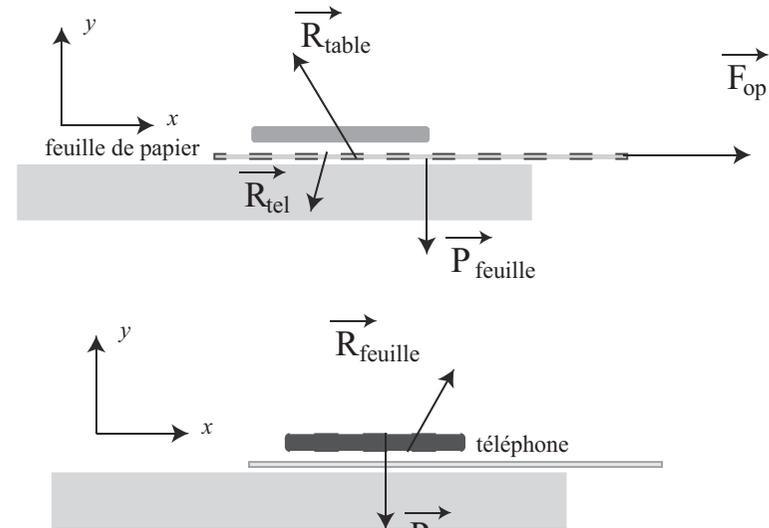


FIGURE 11 – Notations

$$M\vec{a}_{tel} = \vec{P}_{tel} + \vec{R}_{feuille}$$

En projetant sur chacun des axes, on obtient :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_{tel} = T_{feuille} \\ 0 = -Mg + N_{feuille} \end{cases}$$

Lorsque le téléphone glisse, on a donc :

$$T_{feuille} = fN_{feuille} = fMg \quad \text{et} \quad \ddot{x}_{tel} = fg$$

Dans le référentiel lié à la table supposé galiléen, la feuille est soumise à

- la force de l'opérateur  $\vec{F}_{op}$  ;
- son poids  $\vec{P}_{feuille} = -mg\vec{e}_y$  ;
- la réaction du téléphone  $\vec{R}_{tel} = -T_{tel}\vec{e}_x - N_{tel}\vec{e}_y$  ;
- la réaction de la table  $\vec{R}_{table} = -T_{table}\vec{e}_x + N_{table}\vec{e}_y$ .

L'application de la 2<sup>e</sup> loi de Newton à la feuille nous donne :

$$m\vec{a}_{feuille} = \vec{F}_{op} + \vec{P}_{feuille} + \vec{R}_{table} + \vec{R}_{tel}$$

En projetant sur chacun des axes, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{feuille} = F_{op} - T_{table} - T_{tel} \\ 0 = -mg - N_{tel} + N_{table} \end{cases}$$

L'application de la 3<sup>e</sup> loi de Newton nous permet d'écrire :

$$\vec{R}_{feuille} = -\vec{R}_{tel}$$

soit

$$\boxed{T_{feuille} = T_{tel} \quad \text{et} \quad N_{feuille} = N_{tel}}$$

Ainsi on obtient, à l'aide de la 3<sup>e</sup>loi :

$$m\ddot{x}_{feuille} = F_{op} - T_{table} + T_{feuille}$$

Puisque la feuille glisse, la condition de glissement impose :

$$T_{table} = f_t N_{table} = f_t(m + M)g$$

où  $f_t$  est le coefficient de frottement table-feuille. Tant que le téléphone ne glisse par rapport à la feuille, l'accélération du téléphone est identique à celle de la feuille. À partir des équations du mouvement, on en déduit que

$$m\ddot{x}_{feuille} = F_{op} - f_t(m + M)g - fMg$$

En supposant que la masse de la feuille est négligeable devant la masse du téléphone et que les coefficients de frottements sont identiques :

$$m\ddot{x}_{feuille} \approx F_{op} - 2fMg$$

Pour avoir un déplacement de la feuille il faut donc :

$$\boxed{F_{op} > 2fMg}$$

Pour un téléphone de masse  $M = 150$  g, avec  $f \approx f_t = 0,3$ , on obtient :

A.N. :

$$\boxed{F_{op} > 0,9 \text{ N}}$$

Cette force est donc voisine de la force nécessaire à soulever le téléphone.

3 - Exprimons l'équation horaire de la feuille. La double intégration de l'équation précédente donne :

$$mx_{feuille} = (F_{op} - 2fMg)t^2/2$$

Exprimons l'équation horaire du téléphone. La double intégration de l'équation du mouvement donne :

$$x_{tel} = fgt^2/2$$

Soit  $R$  la taille du téléphone, posé à l'extrémité  $L$  de la feuille, le téléphone sort de la feuille pour :

$$x_{feuille} - x_{tel} = R$$

soit

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2mR}{F_{op} - 2fMg}}}$$

On remarque que plus la feuille est tirée avec force, plus ce temps est court.

4 - À cet instant, le téléphone a avancé de

$$x_{tel}(t = \tau) = \frac{fg\tau^2}{2} = \frac{fmg}{F_{op} - 2fMg}R$$

À cette position, le téléphone possède une vitesse de

$$v_0 = fgt_{fin} = fg\sqrt{\frac{2mR}{F_{op} - 2fMg}}$$

On remarque que plus on tire fort sur la feuille plus cet instant est faible et la vitesse du téléphone peu élevée ce qui est confirmé par l'expérience.

5 - Sorti de la feuille, le téléphone glisse avec une vitesse  $v_0$ . On supposera que le coefficient de frottement entre la table et le téléphone est identique à celui du téléphone avec la feuille de papier. L'énergie cinétique emmagasinée par le téléphone lorsqu'on enlève la feuille est ensuite dissipée par frottement sur la table. La distance d'arrêt du téléphone notée  $d$  pour une vitesse initiale  $v_0$  est donnée par la loi de l'énergie cinétique entre l'état (0) (vitesse :  $v_0$ , position O) et l'état (1) (vitesse : 0, position  $d$ ) :

$$E_{C,1} - E_{C,0} = \int_0^d (-T)dx = -T \times d = -fMg \times d$$

---

soit 
$$-\frac{1}{2}Mv_0^2 = -fMgd$$

d'où 
$$d = \frac{v_0^2}{fg} = \frac{2fmg}{F'_{op}}R$$

Le téléphone ne tombe pas si le centre de gravité est encore sur la table. La distance parcourue pendant la phase de glissement sur la feuille puis sur la table doit vérifier :

soit 
$$x_{tel} + d < L - R/2$$

Remplaçons les valeurs obtenues :

Ainsi, 
$$\frac{fmg}{F_{op} - 2fMg}R + \frac{2fmg}{F_{op} - 2fMg}R < L - R/2$$

d'où 
$$\frac{3fmg}{F_{op} - 2fMg}R < L - R/2$$

En négligeant R devant L, on en déduit que

soit 
$$F_{op} > 3fmg\frac{R}{L} + 2fMg \approx 2fMg$$

Ce résultat est légèrement supérieur au cas précédent ce qui est conforme à l'expérience : il est quand même difficile de tirer sur la feuille en faisant glisser le téléphone et que celui-ci finisse par terre...