



PHYSIQUE DU SOLIDE, MÉCANIQUE VIBRATOIRE,

M. BARTHES, M. Colas des Francs

Première partie

Mécanique des Vibrations- Systèmes Périodiques

I. Oscillateur à un degré de liberté

1 - Les Oscillateurs

a) Système équivalent masse-ressort

La dynamique des structures est un domaine de la mécanique des structures traitant de problèmes très variés et faisant donc appel à des méthodes numériques différentes. Sans être exhaustif, on peut citer :

- le comportement des structures soumises à des chocs (crash automobile, chute d'emballage de transport, impact d'avion)
- le mouvement causé par un séisme ou une explosion
- les vibrations induites par un écoulement (pont soumis au vent)

Tous ces problèmes ont en commun, d'une part, un chargement qui varie au cours du temps (mais ceci est le cas pour des problèmes statiques tel que la fatigue ou le fluage) et, d'autre part, l'importance des forces d'inertie (masse de la structure) dans le problème.

La dynamique d'un bâtiment est complexe mais peut être traité en première approximation dans le cas d'un système masse-ressort. Le mouvement se faisant sur un seul axe, on parlera de mouvement à 1 seul degré de liberté.

On peut aussi modéliser le mouvement d'un objet massique sur une poutre. Il est possible de calculer la déformation statique d'une poutre soumise à un chargement. L'équation de la poutre est analytique et sera étudiée dans le cours de mécanique des milieux continus et approfondi en dans le cours de résistance des matériaux. la déformation δ peut être assimilée à l'allongement d'un ressort.

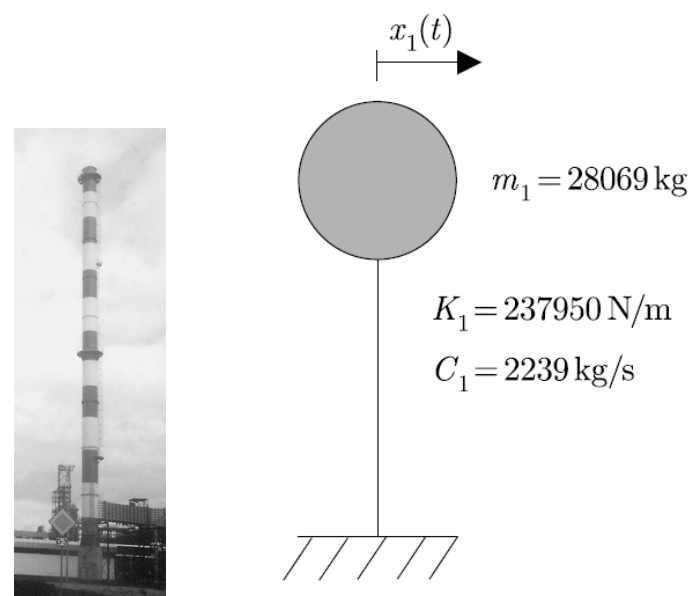


FIGURE 1 – Modélisation d'une cheminée située à Gdansk de hauteur 76.80 m et de 2.9 m de diamètre. D'après REDUCTION OF STEEL CHIMNEY VIBRATIONS WITH A PENDULUM DAMPER TASK QUARTERLY 8 No 1 (2004)

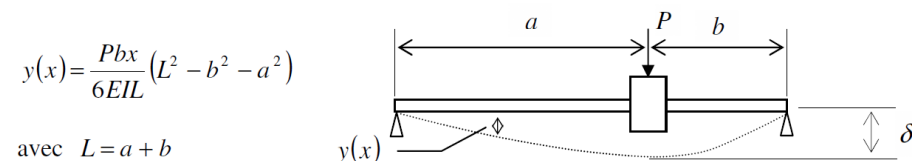


FIGURE 2 – Modélisation d'une poutre par un ressort

b) Caractéristiques du mouvement

On considèrera ici une masse en mouvement par rapport à une partie fixe. La liaison entre les deux solides est caractérisée par une raideur équivalente. Un ressort est caractérisé par :

- sa constante de raideur k exprimée en N.m^{-1} ;
- sa longueur à vide ℓ_0 ;
- sa longueur réelle du ressort ℓ ;

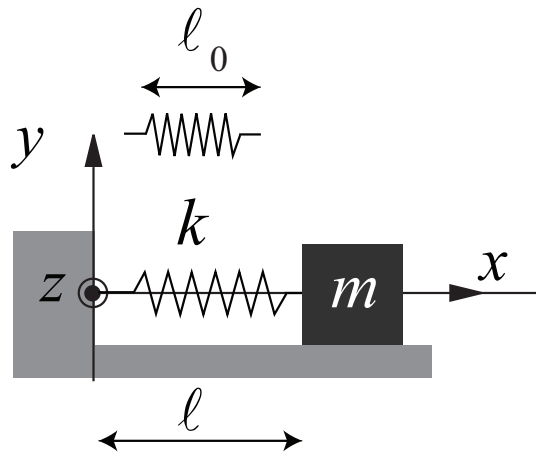


FIGURE 3 – Oscillateur type

La force de rappel notée \vec{F} exercée par un ressort sur un objet est de la forme :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{\text{ressort} \rightarrow \text{objet}}$$

où $\vec{e}_{\text{ressort} \rightarrow \text{objet}}$ un vecteur unitaire dirigé du ressort vers l'objet.

En supposant l'absence de frottement, dans l'exemple ci-dessus, la force du ressort est la seule force horizontale. Notons x la longueur du ressort, l'application de la seconde loi de Newton donne selon l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0$$

Afin de simplifier son écriture, on pose $X(t) = x(t) - \ell_0$ l'allongement du ressort. L'équation vérifiée par $X(t)$ est alors :

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

Définition :

L'équation d'**oscillateur harmonique** de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a pour forme canonique

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

avec A et B deux réels déterminés par deux conditions initiales.

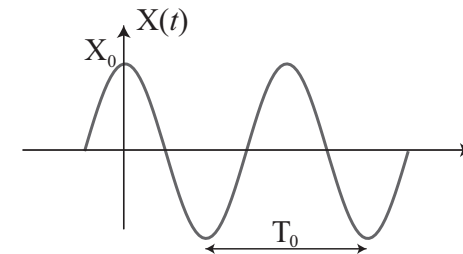


FIGURE 4 – Oscillations harmoniques, avec $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$.

Remarque 1 :

La pulsation est une fonction décroissante de la masse : $\omega \sim 1/\sqrt{m}$. Ainsi quelque soit le système de départ, lorsque le chargement augmente, la pulsation propre diminue.

Cette modélisation sera récurrente tout au long de ce cours. Les déplacements par rapport aux positions d'équilibre permettent d'avoir un second membre nul.

c) Stabilité**Propriété :**

Une équation différentielle linéaire ordinaire possède des solutions « stables », c'est à dire bornées, si tous les coefficients sont de même signe.

Modélisons la cheminée par une tige munie d'une masse à son extrémité et d'un ressort spirale située sur la base.

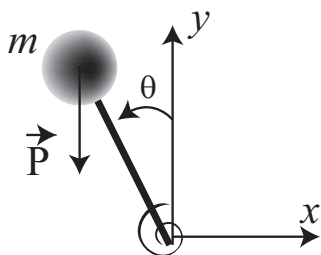


FIGURE 5 – Pendule inversé

L'équation du mouvement devient par application du théorème du moment cinétique :

$$ML\ddot{\theta} = -K\theta + MGL \sin \theta$$

On obtient alors dans l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{K - MGL}{ML}\theta$$

Les solutions sont sinusoïdales si $K - MGL > 0$, sinon, les solutions sont hyperboliques.

d) Méthode énergétique de Rayleigh

Pour un système conservatif, il y a transfert d'énergie potentielle en énergie cinétique. Ce transfert permet de déterminer la pulsation propre du système.

Pour le système type masse-ressort, il vient :

$$E_{p,max} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \quad \text{et} \quad E_{c,max} = \frac{1}{2}m\dot{X}_{max}^2$$

La vitesse de déplacement maximal pour un système oscillant à la pulsation ω_0 est donnée par :

$$\dot{X} = \omega_0 X$$

On obtient alors :

$$E_{c,max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2$$

Le transfert d'énergie s'écrit simplement :

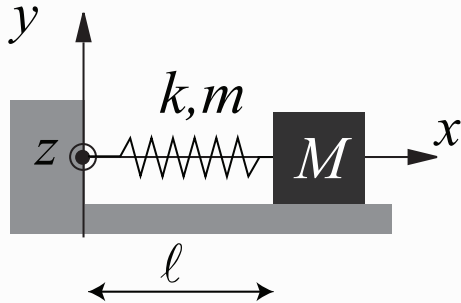
$$E_{p,max} = E_{c,max} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m\dot{X}_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2$$

on en déduit que

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Exemple 1 :

Déterminons la pulsation propre d'un système masse-ressort horizontal lorsque la masse du ressort n'est pas négligeable devant la masse du système. Notons M la masse de la charge et m la masse du ressort.



On considère que la masse du ressort est répartie uniformément de sorte qu'un élément dx du ressort possède une masse :

$$\delta m = \frac{m}{\ell} dx$$

La vitesse de chaque élément du ressort augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche de la masse M . La vitesse variant linéairement, on obtient :

$$v_x = \frac{x}{\ell} \dot{\ell}$$

L'énergie cinétique d'une portion de ressort est donc donnée par :

$$E_{C,ressort} = \int_0^\ell \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} v_x^2 dx = \int_0^\ell \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \frac{x^2}{\ell^2} \dot{\ell}^2 dx$$

On obtient après calcul

$$E_{C,ressort} = \frac{1}{2} \frac{m}{3} \dot{\ell}^2$$

La masse effective du ressort intervenant l'énergie cinétique est donc de $m/3$. On en déduit par la méthode de Rayleigh que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + m/3}}$$

e) limites de la modélisation

La force exercée par un ressort n'est valable que dans certaines limites. Certains ressorts ne fonctionnent qu'en traction (les spires ne doivent pas être collées pour que l'expression de la force soit correcte) d'autres en compression. Dans tous les cas, la constante de raideur k et la longueur à vide ℓ_0 sont constantes sous réserve que l'élongation ne soit pas trop importante. Au delà d'une certaine force appliquée, la déformation n'est pas élastique mais « plastique » et le ressort ne retourne pas à son état initial.

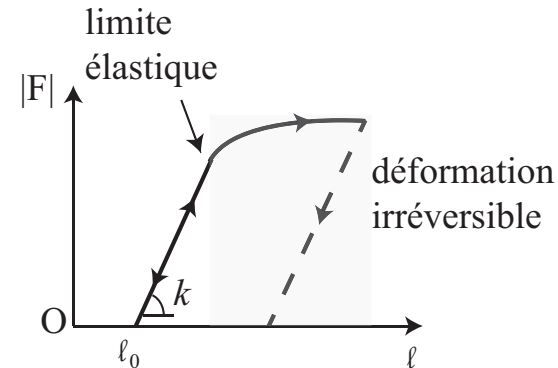


FIGURE 6 – limite de déformation élastique

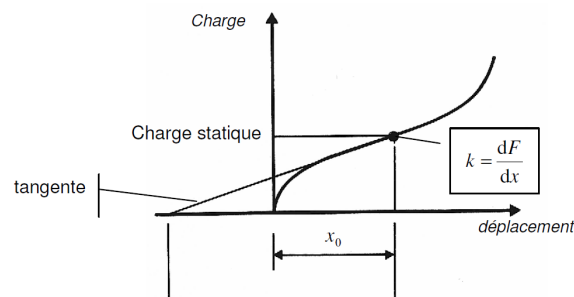
Certains ressorts sont construits pour ne fonctionner qu'en traction, les spires au repos sont quasi-jointives et il est impossible de le comprimer. D'autres en revanche sont construits pour fonctionner principalement en compression comme les amortisseurs.

- soumis à une charge importante, la constante de raideur des matériaux peut varier : $k = f(m)$



FIGURE 7 – Ressorts de traction et compression

- la force peut être non-linéaire (phénomène d'écrasement, modèle du contact de Hertz : $f \sim kx^{3/2}$).

FIGURE 8 – Rigidité dynamique et statique d'un support élastique *d'après Supports élastiques, Paulstra*

2 - Oscillateur amorti

Dans la quasi-totalité des cas, l'énergie initialement présente dans le système est complètement dissipée en raison des déformations inélastiques du matériau, des frottements dus à l'air... Lors de mouvement dans un béton, l'apparition de micro-fissures dissipent de l'énergie. Il existe également de multiples type d'amortisseur dédié au bâtiment, permettant de dissiper l'énergie en cas de mouvement

En présence d'une force de frottement, l'oscillateur est dit **amorti**. Une solution analytique est possible si la force de frottement est fluide c'est à

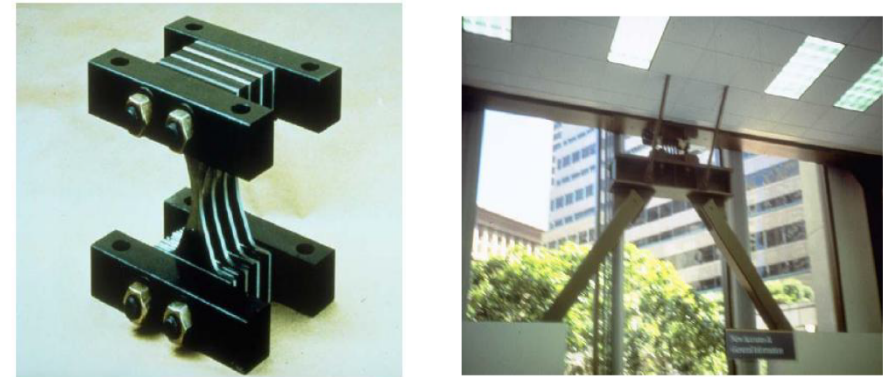


FIGURE 9 – Amortisseur à plaque triangulaire (ADAS) utilisant la déformation plastique de la pièce située à gauche. (d'après ANALYSE DES CAPACITES DISSIPATIVES DES STRUCTURES EN ACIER PAR AMORTISSEURS, 2015)

dire proportionnelle à la vitesse

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

avec α une constante.

L'ajout de cette force dans les deux cas précédents donne une équation sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$



FIGURE 10 – Amortisseur de la société Jarret utilisé dans le génie civil (d'après <http://jarretstructures.com>, 2005)

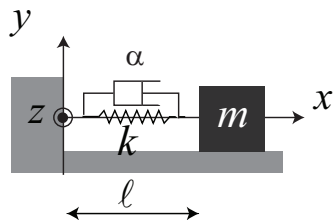


FIGURE 11 – Oscillateur amorti

Définition :

Ces deux équations peuvent se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

où ω_0 la pulsation propre et Q : le facteur de qualité. On trouve également comme forme canonique :

$$\ddot{X} + 2\zeta\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

où ζ est le paramètre d'amortissement

Du point de vue mathématique, il y a trois types de solutions possibles selon le signe du discriminant et donc de la valeur du facteur de qualité :

Régime pseudo-périodique, critique et apériodique

dont la représentation pour des mêmes conditions initiales est ci-dessous.

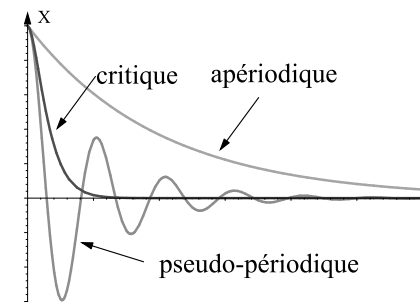
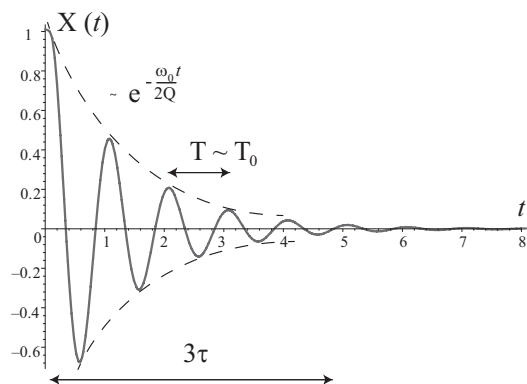


FIGURE 12 – $X(t)$ avec $X(0) = A$, $\dot{X}(0) = 0$ et $X_0 = 0$

Pour le régime pseudo-périodique, la solution d'un oscillateur amorti présente des oscillations d'amplitude exponentiellement décroissante.

FIGURE 13 – Chronogramme de $X(t)$ pour $Q = 4$, $T_0 = 1$ s

Propriétés :

- La pseudo-période T est très voisine de la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$.
- Le facteur de qualité Q traduit grossièrement le nombre d'oscillations visibles

À partir de la résolution mathématiques, le temps caractéristique de décroissance des oscillations est donné par :

$$\tau = 2Q/\omega_0 \approx T_0 \times Q/\pi.$$

Ainsi pour $t = 3\tau$ soit $t \approx Q \times T_0$, l'amplitude des oscillations n'est que 5% de l'amplitude initiale.

3 - Oscillations forcées pour 1 ddl

a) Nature du forçage

Le forçage d'un système oscillant peut prendre différentes formes naturelles :

- vagues

- séismes : les ondes de surface dite de Rayleigh et de Love sont responsables de la destruction des bâtiments lors d'un tremblement de Terre. Le sol peut être soumis à une modification local de sa surface : en hauteur ou en cisaillement.

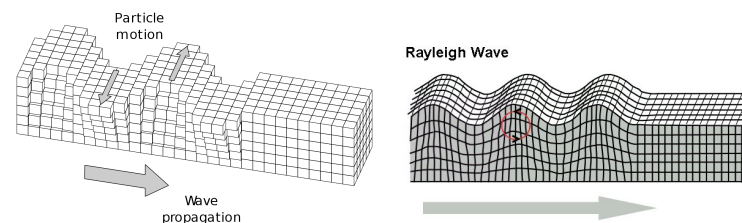


FIGURE 14 – Ondes de surface : Love et Rayleigh

- le vent soufflant sur une structure peut générer des tourbillons (vortex de Von Karman) causant des vibrations à la structure. L'école polytechnique de Milan possède un tunnel permettant d'étudier des maquettes de grande taille en soufflerie

ou humaines :

- déplacement de camion sur un pont / route
- travaux

L'effondrement du Rana Plaza est l'effondrement d'un immeuble à Savar, faubourg ouest de Dacca, la capitale du Bangladesh¹, parfois appelé « catastrophe de Dacca » par les médias, le 24 avril 2013, a provoqué au moins 1 127 morts pour environ 2 500 rescapés (bilan au 13 mai 2013). Les sources ultérieures parlent de 1 135 morts.

L'effondrement du Rana Plaza est le résultat d'une succession de dysfonctionnements et de négligences coupables (4 étages supplémentaires construits sans permis). Le drame fut causé par les vibrations provoquées par les générateurs d'électricité installés en haut du toit pour alimenter les usines.

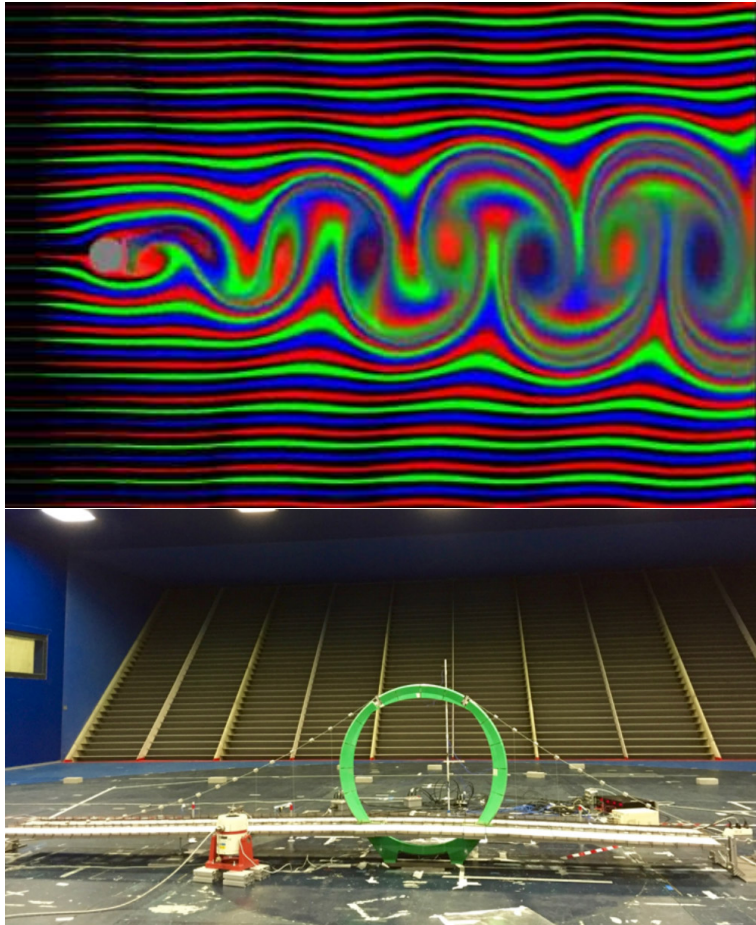
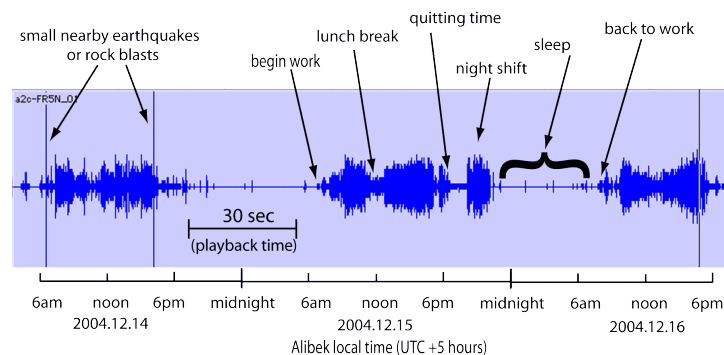


FIGURE 15 – Vortex de Von Karman, installation GVMP, Milano.



FIGURE 16 – Portion du viaduc de l'A10 écroulée à Gênes en Italie, le 14 août 2018 suite à une tempête *Photo Paola PIRRERA. AFP*

FIGURE 17 – Pont de Tacoma détruit par résonance par effet du vent sur les haubans *D'après <https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>*



Vertical ground motion in Alibek, Turkmenistan (ABKT), December 14-16 2004.
Bandpass filtered at 3 Hz to emphasize anthropogenic surface noise. Audio playback scale factor: 1100.



FIGURE 18 – L’effondrement du Rana Plaza est l’effondrement d’un immeuble à Savar, faubourg ouest de Dacca, la capitale du Bangladesh *source Wikipédia*

b) Intérêt notation complexe

Lorsqu’un bâtiment est soumis à une sollicitation extérieure (tremblement de terre, effet du vent, des vagues, ...), il faut pouvoir déterminer l’amplitude de des déformations pour contrôler la stabilité de l’ouvrage.

L’excitation peut prendre différentes formes, une unique secousse, une excitation sinusoïdale permanente (cf. Rana Plaza), ou une vibration restreinte dans le temps.

La figure ci-dessous montre un accélérogramme enregistré lors du séisme de Northridge en Californie en 1994 ($M_w=6,7$) à la station de Lake Hugues (située à environ 50km de l’épicentre). On voit que l’accélération à laquelle sont soumis les enjeux n’est pas constante mais oscille dans le temps, et que le module de l’accélération maximale est de l’ordre de $2m.s^{-2}$, soit $0,2g$ environ.

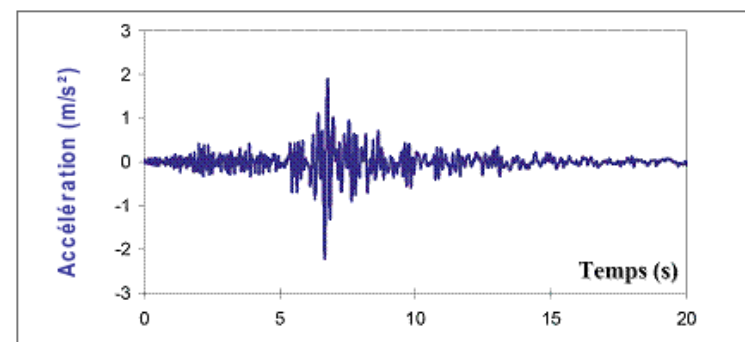


FIGURE 19 – ACCÉLÉROGRAMME ENREGISTRÉ LORS DU SÉISME DE NORTHRIDGE, CALIFORNIE, 1994 *Alain Pecker, Dynamique des structures et des ouvrages, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.*

Une possibilité pour obtenir la réponse d’un système linéaire est d’utiliser la transformée de Laplace qui contient la transformée de Fourier utilisée dans les années précédentes.

On rappelle que si une excitation est périodique de période $T = 2\pi/\omega_T$ et continue par morceau, la fonction la représentant peut s’écrire :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

De sorte que l'équation canonique associée à un système forcé s'écrit sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F(t)}{m}$$

La recherche de la solution particulière est obtenue comme étant la somme de la solution sans second membre et des solutions particulières pour chaque fréquence :

$$X(t) = X^{\mathcal{H}}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left(a_n \cos(n\omega_{\text{T}}t - \Phi_n) + b_n \sin(n\omega_{\text{T}}t - \Phi_n) \right)$$

où $X^{\mathcal{H}}(t)$ est la solution de l'équation homogène :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

et $X_n \left(a_n \cos(n\omega_{\text{T}}t - \Phi_n) + b_n \sin(n\omega_{\text{T}}t - \Phi_n) \right)$ est la solution de :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{a_n \cos n\omega_{\text{T}}t + b_n \sin n\omega_{\text{T}}t}{m}$$

c) Rappels sur la notation complexe

Les oscillations forcées sont obtenus en soumettant un oscillateur à une excitation sinusoïdale de la forme $F = F_0 \cos \omega t$. L'amplitude du mouvement par rapport à la position d'équilibre ($F = 0$ implique $z = 0$) suit alors l'équation suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Un dispositif couramment employé comme démonstration est constitué d'un moteur permettant de tirer d'un côté d'un ressort. L'extrémité supérieure O' est animé d'un mouvement de la forme $OO' = u(t) = U_0 \cos \omega t$.

L'équation différentielle étant une équation avec second membre, la solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre (ou homogène) et d'une solution particulière.

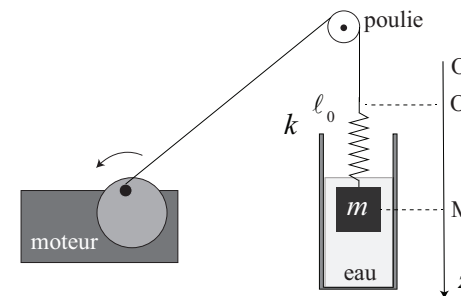


FIGURE 20 – Système d'étude d'un oscillateur forcé par une extrémité.

La solution de l'équation homogène est une fonction dont l'amplitude décroît exponentiellement et ceci quelque soit le type de régime (apériodique, critique ou pseudo périodique).

Par exemple, pour des valeurs de Q permettant le régime pseudo-périodique, la solution présente des oscillations pour une période de l'ordre de T_0 et la durée du régime transitoire est de l'ordre de QT_0 (le nombre d'oscillations visibles).

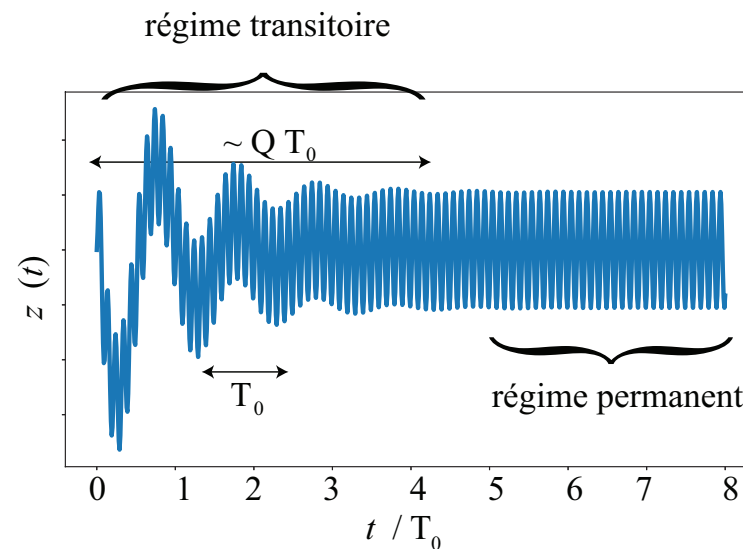


FIGURE 21 – Solution pour $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $Q = 4$, $\omega = 10 \times \omega_0$.

Ainsi, en présence d'un forçage sinusoïdal, seule la solution particulière est intéressante puisque c'est la seule dont l'amplitude est non nulle pour des temps supérieurs au temps de réponse propre du système.

On ne s'intéresse qu'à l'amplitude et à la phase du mouvement par rapport à la force excitatrice. Ceci correspond du point de vue mathématiques à déterminer une solution particulière. L'excitation étant à la fréquence ω et l'équation étant linéaire, on utilise alors la notation complexe en posant :

$$\underline{z}(t) = Z(\omega)e^{i\omega t}$$

L'équation à résoudre étant alors :

$$\ddot{\underline{z}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{z}} + \omega_0^2\underline{z} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

Une dérivée temporelle consiste en une multiplication par $i\omega$, on obtient :

$$(i\omega)^2\underline{z} + \frac{i\omega_0\omega}{Q}\underline{z} + \omega_0^2\underline{z} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

Après factorisation, il vient :

$$\underline{z} = Z(\omega)e^{i\omega t} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{i\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2 - \omega^2}e^{i\omega t}$$

4 - Phénomène de résonance

a) Résonance en élongation

L'élongation, $Z(\omega)$ est donnée par :

$$Z(\omega) = |\underline{z}| = \underline{z} = Z(\omega)e^{i\omega t} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

L'amplitude ne présente un maximum que si le dénominateur présente un minimum. L'étude de la fonction :

$$f : X \mapsto \omega_0^2/Q^2 X + (\omega_0^2 - X)^2$$

montre l'existence du minimum si $Q > \sqrt{2}/2 \approx 0,7$.

Définition :

On parle de fonction de transfert en déplacement car il est possible d'écrire la solution particulière comme un produit de la valeur d'excitation avec la fonction de transfert suivante :

$$H(i\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{i\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2 - \omega^2}$$

Propriétés :

- il n'y a résonance en élongation que si $Q > \sqrt{2}/2$
- Le facteur de qualité ou le coefficient d'amortissement est responsable de l'amplitude : à la résonance : $Z(\omega_0) = Q \times Z_{\omega=0}$.
- à la résonance, la déphasage est de $\pi/2$, l'excitation et la réponse sont en *quadrature de phase*
- à fréquence nulle, on reconnaît le déplacement du au chargement *statique*
- à haute fréquence l'excitation et la source sont en opposition de phase.

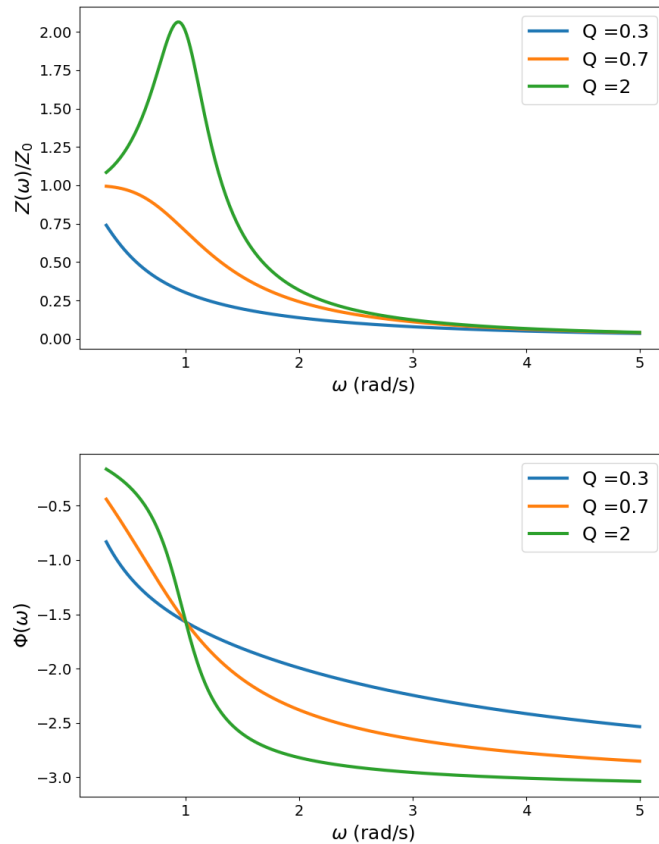


FIGURE 22 – Résonance en élongation, déplacement et phase.

Remarque 2 :

Les courbes de résonance peuvent être déformées lorsque les ressorts équivalents mis en jeu sont non-linéaire.

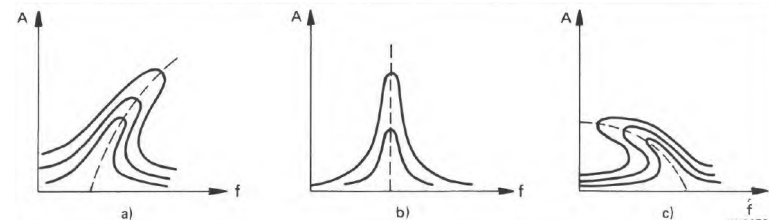


FIGURE 23 – Résonance en élongation, ressort plus dur à haute fréquence, linéaire, plus mou à haute fréquence

b) Résonance en vitesse

L'élongation, $Z(\omega)$ est donnée par :

$$Z(\omega) = |z| = z = Z(\omega)e^{i\omega t} = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

On en déduit que la vitesse est donnée en notation complexe par :

$$V(\omega) = i\omega Z(\omega) = i\omega \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Définition :

On parle de fonction de transfert en vitesse sur le même principe que la fonction de transfert en déplacement. Il est possible d'écrire la vitesse du système comme un produit de la valeur d'excitation avec la fonction de transfert suivante :

$$H(i\omega) = i\omega \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{i\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2 - \omega^2}$$

Propriétés :

- il y a toujours résonance en vitesse quelque soit Q
- Le facteur de qualité est relié à l'acuité de la résonance :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

où $\Delta\omega$ est l'intervalle de pulsation vérifiant $Z(\omega) > Z_{max}/\sqrt{2}$

- à la résonance, l'excitation et la vitesse sont en phase. La puissance dissipée est maximale ($\mathcal{P}(\vec{f}) = -\alpha v^3$).

Propriété :

La mesure de la fonction de transfert d'une structure peut s'effectuer avec des micro-oscillateurs connus sous l'acronyme MEMS pour Microelectromechanical systems (cf. figure 25) voire même des nano-oscillateurs (cf. figure ??) permettant de mesurer en temps réel l'accélération d'une structure

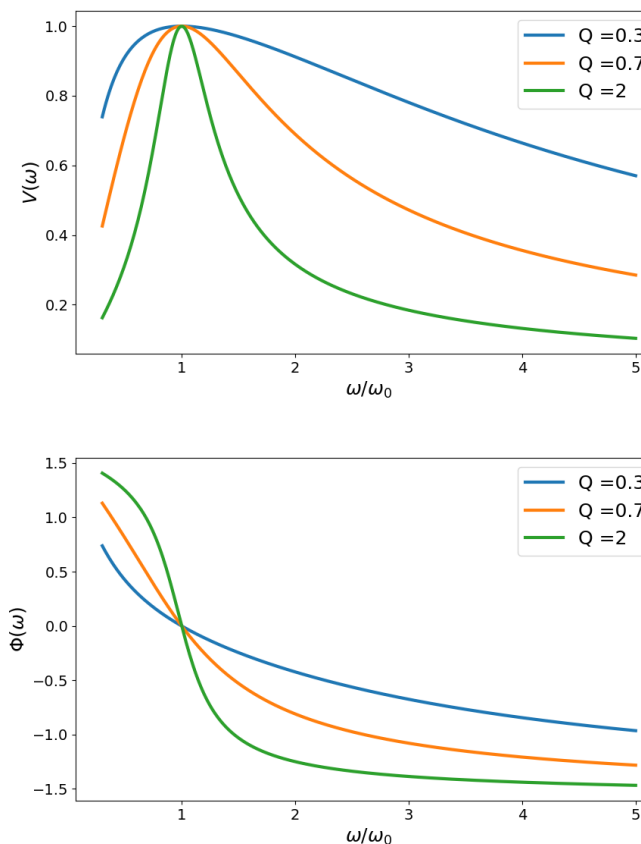


FIGURE 24 – Résonance en vitesse, amplitude et phase

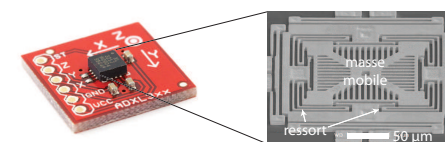


FIGURE 25 – Micro-acceleromètre

Exemple 2 :

On considère un oscillateur amorti excité par l'intermédiaire de plots de suspension. On note $x(t)$ la position de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre et $y(t)$ celle du support vibrant.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\zeta\omega_0 = \alpha/m$.

2 - Pour un mouvement de la base sinusoïdal à la pulsation ω , déterminer l'amplitude du mouvement de l'oscillateur $X(\omega)$.

3 - Représenter l'amplitude du mouvement.

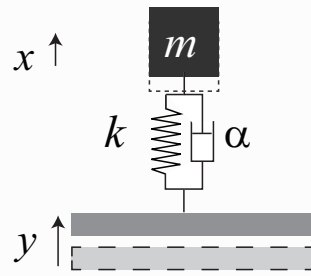


FIGURE 26 – Système excité par la base

1 - L'équation différentielle est donnée par :

$$m\ddot{x} = -\alpha(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y)$$

On obtient alors :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y$$

2 - Pour un mouvement sinusoïdal, on peut utiliser la notation complexe :

$$y(t) = Y \cos \omega t = \text{Re}(Ye^{i\omega t})$$

On obtient alors :

$$\underline{X} = \frac{2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2}{2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2 - \omega^2} \underline{Y}$$

L'amplitude du mouvement est donnée par :

$$|\underline{X}| = \sqrt{\frac{4\zeta^2\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4}{(4\zeta\omega_0\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \underline{Y}$$

3 - En faisant les équivalents en hautes et basse fréquence, on obtient :

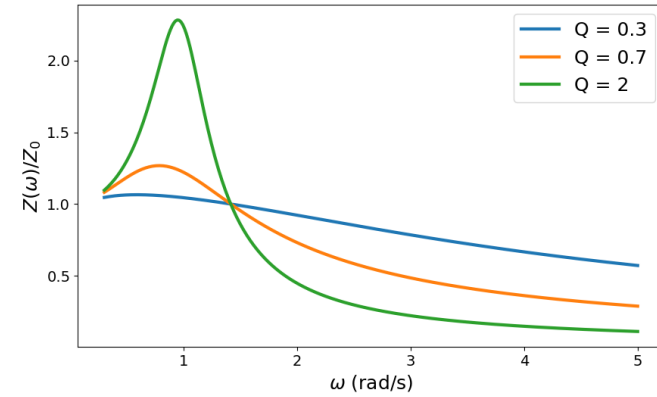


FIGURE 27 – Résonance en amplitude d'un système excité par la base

Définition :

La fonction de transfert réelle permettant de déterminer l'amplitude du mouvement du système en fonction de l'amplitude du mouvement de l'excitation est appelée **transmissibilité en déplacement**.

5 - Introduction à la transformée de Laplace

a) Présentation du calcul formel

La transformation de Laplace est particulièrement bien adaptée à l'étude des systèmes initialement au repos et excités à un instant $t = 0$. En effet soit $x(t)$ une fonction telle que :

$$x(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

n'admettant qu'un nombre fini de discontinuités et étant bornée dans l'intervalle $t \geq 0$.

◆ Définition :

Nous pouvons définir la fonction de la variable complexe p appelée transformée de Laplace de la fonction $x(t)$ par :

$$X(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt$$

avec $p = \gamma + i\omega$.

On notera la transformée de Laplace par :

$$X(p) = \mathcal{L}(x(t))$$

On remarque que le cas $\gamma = 0$ permet de retomber sur la transformée de Fourier.

◆ Propriété :

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = pX(p) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0^+)$$

L'intérêt pour l'ingénieur de ce type de transformation est d'utiliser une bibliothèque de fonctions et de s'y ramener.

b) Les différentes excitations

La fonction échelon définie par :

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

a pour transformée de Laplace :

Fonction	Domaine temporel $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1
Echelon unité	$u(t)$	$1/p$
Rampe	$u(t) = t$	$1/p^2$
Décroissance exponentielle	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
Approche exponentielle	$(1 - e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
Sinus	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
Sinusoïde amortie	$e^{-a \cdot t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

TABLE 1 – Quelques fonctions usuelles et leur transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(Y(t)) = \frac{1}{p}$$

La fonction impulsion unité définie par :

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t \geq \Delta t \\ 1/\Delta t & \text{si } 0 < t < \Delta t \end{cases}$$

a pour transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(\mu(t)) = 1$$

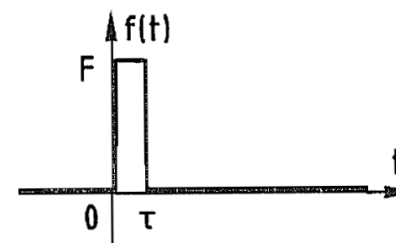


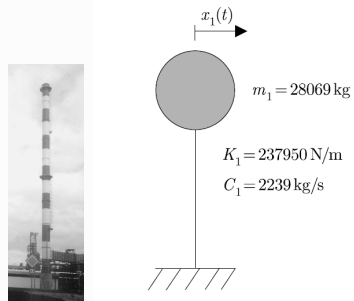
FIGURE 28 – Fonction impulsion

Remarque 3 :

Un choc crée par une secousse brève (choc avec un marteau/-masse) permet d'être décrit comme une impulsion sous réserve que le temps du choc soit court devant le temps de réponse harmonique du système $1/\omega_0$.

Exemple 3 :

En utilisant la modélisation d'une cheminée, selon la figure ci dessous. On posera $\omega_0 = K/m$ et $2\zeta\omega_0 = C/m$.



On suppose l'édifice à l'équilibre à $t = 0$. Déterminer la réponse à une impulsion ($\vec{F} = F_0\delta(t)\vec{e}_x$) dans le cas où

- 1 - on néglige l'amortissement.
- 2 - l'amortissement est non-négligeable

1 - Avec un amortissement négligeable, l'équation devient :

$$m\ddot{x} = -kx + F_0\delta(t)$$

soit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\delta(t)$$

L'application de la transformée de Laplace donne :

$$(p^2 + \omega_0^2)X = \frac{F_0}{m}$$

Soit :

$$X(p) = \frac{F_0/m}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

La transformée de Fourier inverse donne :

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

2 - Avec un amortissement, l'équation devient :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\delta(t)$$

L'application de la transformée de Laplace donne :

$$(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)X = \frac{F_0}{m}$$

Soit :

$$X(p) = \frac{F_0/m}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{F_0/m}{(p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)} = \frac{F_0/m}{\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}}{(p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)}$$

La transformée de Fourier inverse donne :

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_0 t$$

Propriété :

La fonction de transfert est la réponse impulsionnelle unité du système.

Considérons un système oscillant défini précédemment soumis à une impulsion :

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \mu(t)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace permet d'écrire :

$$(p^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2)X(p) = \mathcal{L}(\mu(t)) = 1$$

D'où :

$$X(p) = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2)} = H(p)$$

On admettra que si p_0 est un pôle de la fonction $H(p) = \frac{1}{p-p_0}$ alors

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}H = e^{p_0t}$$

Pour l'oscillateur amorti, les pôles de la fonction de transfert sont données par :

$$p_{1/2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0$$

Les solutions sont de la forme :

$$G(t) = Ae^{p_1t} + Be^{p_2t}$$

En prenant la partie réelle, on reconnaît des fonctions oscillantes à la fréquence propre du système dont l'amplitude est exponentiellement décroissante.

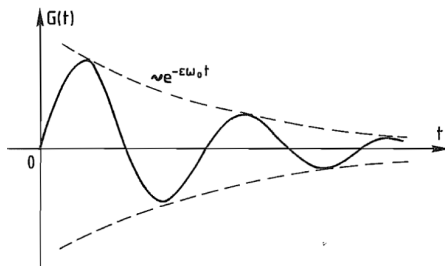


FIGURE 29 – Réponse d'un oscillateur amorti à une impulsion

▲ Définition :

La solution d'un système à une réponse impulsion est appelée fonction de *Green*

c) Application

Exemple 4 :

On considère un oscillateur amorti initialement immobile excité par un tremblement de Terre. On note $x(t)$ la position de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre et $u(t)$ celle du sol. Dans le référentiel non galiléen associé au sol, la structure est soumise à une force d'inertie définie par :

$$\vec{F}_{ie} = -m\ddot{u} \vec{e}_x$$

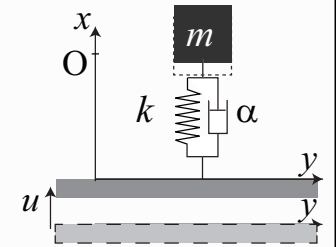


FIGURE 30 – Système excité par un tremblement de terre

- 1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\zeta\omega_0 = \alpha/m$.
- 2 - Pour un mouvement de la base sinusoïdal à la pulsation ω , déterminer l'amplitude du mouvement de l'oscillateur $X(\omega)$.
- 3 - Représenter l'amplitude du mouvement pour une secousse définie sous la forme d'un dirac : $u(t) = U \times \delta(t)$.

Données :

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cos \beta t) = \frac{p(p - \alpha)}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(e^{\alpha t} \sin \beta t) = \frac{p\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$$

- 1 - L'application du pfd dans le référentiel terrestre non galiléen conduit à :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} - m\ddot{u}$$

Avec les notations de l'énoncé, il vient :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{u}$$

2 - Pour un mouvement sinusoïdal, l'amplitude complexe est donnée par :

$$\underline{X} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega} U$$

3 - La fonction de transfert est alors définie par :

$$\underline{H} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega}$$

Déterminons une expression voisine de celles proposées :

$$H(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2 + p^2 + 2\zeta\omega_0 p}$$

En factorisant le dénominateur :

$$H(p) = \frac{p^2}{(p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)}$$

Pour coïncider avec les valeurs données dans l'énoncé, posons :

$$\alpha = -\zeta\omega_0 \quad \text{et} \quad \beta = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

On obtient alors :

$$H(p) = \frac{p^2}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{p(p - \alpha)}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha p}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$$

Faisons apparaître la deuxième forme proposée :

$$H(p) = \frac{p(p - \alpha)}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta p}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$$

On en déduit que la solution est de la forme :

$$x(t) = U \times [e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t]$$

Remarque 4 :

L'utilisation des conditions initiales intervient dans le calcul de la transformée de Laplace des dérivées :

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = pX(p) - x(0)$$

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0)$$



FIGURE 31 – Tour du Tokyo Metropolitan Government (243 m) et ses absorbeurs de chocs. D'après <https://resources.realestate.co.jp>.

d) Cas d'une excitation quelconque

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = f(t)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace permet d'écrire :

$$(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)X(p) = \mathcal{L}(f(t)) = 1$$

On en déduit que :

$$X(p) = H(p) \times F(p)$$

où $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$.

La solution est donc donnée par :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X) = \mathcal{L}^{-1}(H(p) \times F(p))$$

La connaissance de la fonction de transfert $H(P)$ permet donc de calculer la transformée de Laplace de la réponse à une oscillation quelconque. La relation précédente est la transformée de Laplace du produit de convolution

$$x(t) = \int_0^t G(t - t_0)f(t_0)dt_0$$

($G(t)$ étant la fonction de Green définie précédemment). On peut donner de cette dernière expression l'interprétation physique suivante. En décomposant la force $f(t)$ en une succession d'impulsion de valeur $f(t_0)$.

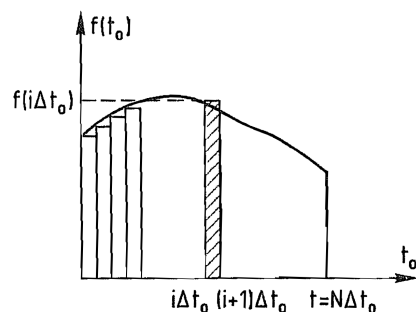


FIGURE 32 – Décomposition d'une excitation quelconque en une suite d'impulsion

II. Oscillateur à plusieurs degrés de liberté

1 - Systeme à 2 ddl

a) **Modèle non-dissipatif**

Un entrepôt de chargement à 2 étages peut se décomposer en deux oscillateurs couplés.

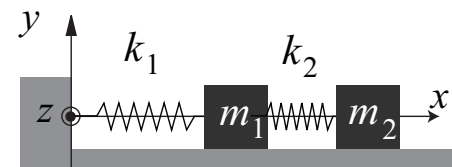


FIGURE 33 – Zone de stockage à deux étages et modélisation en compression

Considérons un système composé de deux masses accrochées par des ressorts. En notant x_1 et x_2 les allongements ressorts par rapport à leur position d'équilibre, les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) \end{cases}$$

Les équations obtenues sont dites couplées puisqu'une dérivée d'une variable (par ex. x_1) fait intervenir l'autre variable (x_2).

Une écriture matricielle permet d'écrire le système d'équation de façon simple :

- soit M la matrice des masses :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

- le vecteur colonne correspondant au déplacement :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- la matrice des ressorts :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Le système précédente s'écrit alors :

$$M\ddot{X} + kX = 0$$

b) Résolution du système



Propriété :

Les matrices de masses et des raideurs sont symétriques réelles et donc diagonalisables.

Le système étant par nature oscillant, on cherche une solution s'écrivant en notation complexe :

$$X = \begin{pmatrix} \underline{X}_1 e^{i\omega t} \\ \underline{X}_2 e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

Le système précédent devient :

$$(-M\omega^2 + k)X = 0 \quad \text{ou} \quad DX = 0$$

où D est nommée matrice dynamique.

Une solution non trivial existe seulement si la matrice D n'est pas inversible soit :

$$\det D = 0 \quad \text{soit} \quad m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_1 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

Il s'agit d'une équation bicarré avec deux valeurs possibles positives pour ω .

c) Notion de modes

Posons pour simplifier $m_1 = m_2$, $k_1 = k_2$, $\omega_0^2 = k_1/m_1$. la matrice dynamique s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

L'annulation du déterminant conduit à :

$$\omega^4 - 3\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

Les deux solutions sont :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

soit :

$$\omega_1 \approx 0,6\omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = 1,6\omega_0$$

⚠ Définition :

Les pulsations permettant d'annuler le déterminant de la matrice dynamique sont appelées pulsations des modes propres du système.

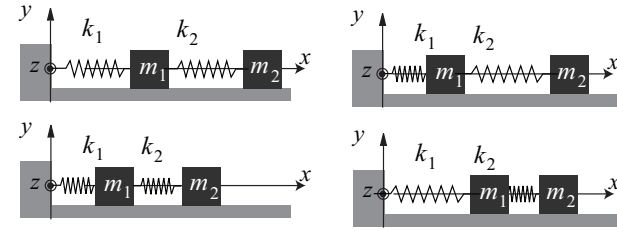


FIGURE 34 – Mouvement associés aux modes propres à 2ddl

Déterminons les vecteurs propres associées aux valeurs de ω :

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour la pulsation ω_1 , le mouvement vérifie :

$$x_2(t) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x_1(t)$$

De la même façon, pour la pulsation ω_2 on obtient :

$$x_2(t) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x_1(t)$$

On fait apparaître deux vecteurs propres :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

Pour des conditions initiales qui coïncident avec les allongements des vecteurs propres, il est possible de faire osciller le système soit à la pulsation ω_1 , soit à la pulsation ω_2 .

ⓘ Remarque 5 :

Pour des conditions initiales quelconques, l'évolution temporelle sera une superposition des deux modes propres

2 - Couplage fort, couplage faible

a) Modélisation du couplage

La modélisation par différents degrés de liberté peut très bien correspondre à deux type de mouvement d'une même structure selon 2 directions différentes, ou un mode de vibration par flexion couplés à un mode de vibration par torsion.

Considérons un système symétrique couplé par un ressort de constante de raideur k' .

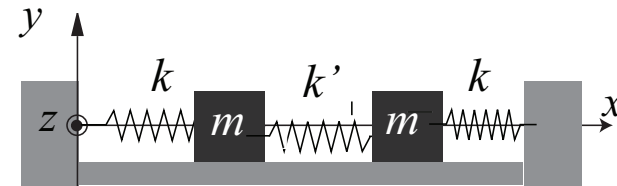


FIGURE 35 – système couplé

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Posons $\omega_0^2 = k/m$ et $\alpha = k'/k$. Ces équations deviennent

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2(1 + \alpha)x_1 - \omega_0^2\alpha x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2(1 + \alpha)x_2 - \omega_0^2\alpha x_1 = 0 \end{cases}$$

b) modes propres

Recherchons les mouvements pour lesquels la pulsation du mouvement de chaque masse est identique. La matrice dynamique s'écrit alors :

$$D = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2(1 + \alpha) & -\omega_0^2\alpha \\ -\omega_0^2\alpha & -\omega^2 + \omega_0^2(1 + \alpha) \end{pmatrix}$$

Le système possède une solution non-triviale si le déterminant est nul. Le déterminant vaut :

$$\det D = (-\omega^2 + \omega_0^2(1 + \alpha))^2 - \omega_0^4\alpha^2$$

$$\det D = \omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2(1 + \alpha) + \omega_0^4(1 + 2\alpha)$$

Le discriminant vaut alors :

$$\Delta = 4\omega_0^4(1 + \alpha)^2 - 4\omega_0^4(1 + 2\alpha) = 4\omega_0\alpha^2$$

Les solutions sont de la forme :

$$\omega_{\pm} = \omega_0\sqrt{(1 + \alpha) \pm \alpha}$$

On remarque si une des masses est bloquée, la pulsation propre du système est $\omega_0\sqrt{1 + \alpha}$. Le couplage est donc responsable d'une séparation des fréquences des modes en fonction de α symétriquement par rapport à la fréquence propre des oscillateurs de départ.

Ce phénomène de séparation des fréquences en fonction de la force de couplage est un phénomène très courant en physique, notamment en physique quantique.

▲ Définition :

Pour un couplage faible, ($\alpha \ll 1$), les fréquences de chaque mode sont proches. Les oscillations associées pour des conditions initiales quelconques sont appelées **battement**

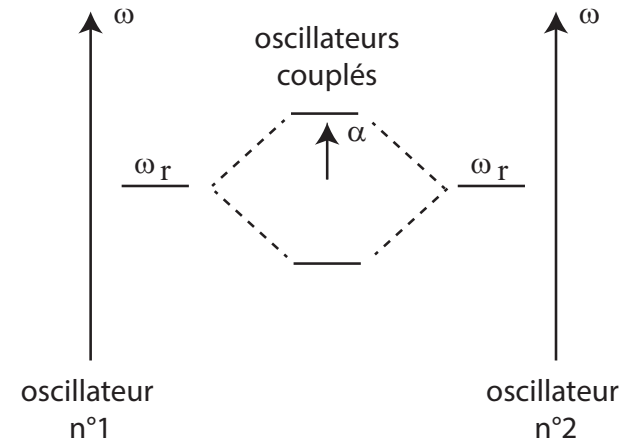


FIGURE 36 – Evolution des pulsations des modes propres pour deux oscillateurs couplés

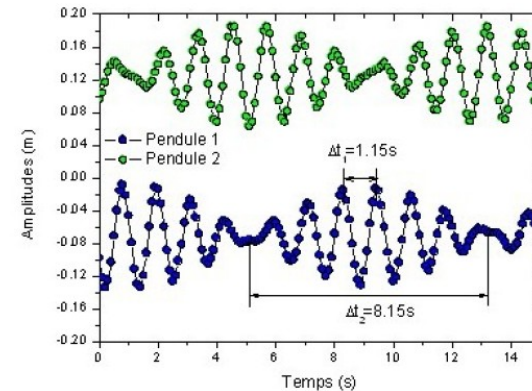


FIGURE 37 – Evolution des amplitudes des deux systèmes

RAJOUTER CAS DES TOUS JUMELLES WORLD TRADE CENTER ù

Si le couplage est fort les deux fréquences sont très différentes et le phénomène de battement disparaît.

3 - Système à 2 ddl forcé

a) Ecriture avec forçage sinusoïdale

Avec les mêmes notations que précédemment, on peut forcer le système avec une force sinusoïdale en utilisant un moteur muni d'un excentrique.

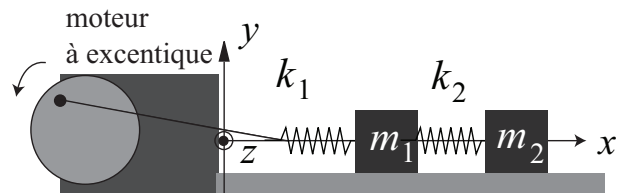


FIGURE 38 – Forçage d'un système à 2ddl

L'allongement du premier ressort s'écrit : $\ell_1 = x_1 - u(t)$ où $u(t) = U_0 \cos \omega t$ est du au mouvement de l'excentrique. On obtient alors :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - u(t)) + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = k_1u(t) \\ -k_2x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + k_2x_2 = 0 \end{cases}$$

En réutilisant l'écriture matricielle proposée avant, en utilisant la notation complexe, on obtient :

$$D \times X = F$$

où F est la matrice de forçage définie dans notre exemple par :

$$F = \begin{pmatrix} k_1 U_0 e^{j\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

▲ Définition :

Dans un cas général, la matrice de forçage s'écrit :

$$F = \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{pmatrix}$$

b) Résolution

On a vu que la matrice D était diagonalisable. Sous réserve que la pulsation ω n'était pas un des modes propres du système, le déterminant de la matrice est non nul et la matrice est inversible. On en déduit que le mouvement peut être donné par :

$$X = D^{-1} \times F$$

Pour une matrice de dimension 2, l'inverse d'une matrice s'écrit simplement avec le déterminant et la comatrice :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com } A$$

Dans le cas précédent simplifié, on a :

$$D = \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \times \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

De sorte que le mouvement est obtenu par :

$$X = D^{-1} \times F = \frac{1}{\det(D)} \times \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_0^2 U_0 e^{j\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\det D} (-\omega^2 + \omega_0^2) \omega_0^2 U_0 e^{j\omega t} \\ x_2 = \frac{1}{\det D} \omega_0^4 U_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$

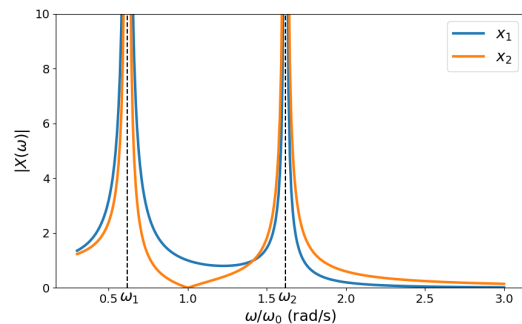


FIGURE 39 – Amplitude du mouvement d'un système à 2ddl forcé

Le mouvement est donc divergent pour les modes propres du système : toute l'énergie fournie par l'excitation est absorbée. Sans dissipation, l'amplitude du mouvement devient infinie.

FIGURE 40 – Simulation de l'amplitude du mouvement pour 2ddl

Pour la fréquence propre d'un seul oscillateur, on remarque un phénomène d'antirésonance. Pour $\omega = \omega_0$, l'amplitude de la masse 2 est nulle. Ce phénomène est utilisé pour réduire les vibrations de systèmes oscillants 42.

FIGURE 41 – Destruction d'un entrepôt lors d'un choc *D'après <https://www.youtube.com/watch?v=rPUzq6mzTs8>*

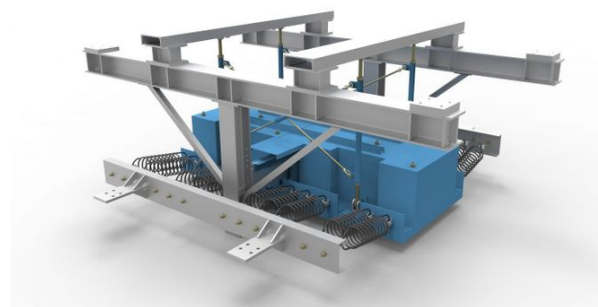


FIGURE 42 – Système de diminution de vibrations, société VICODA

4 - Dissipation

a) Modélisation

En présence d'amortissement, associons une force de frottement de la forme $-\alpha \frac{d\ell}{dt}$ à chaque ressort.

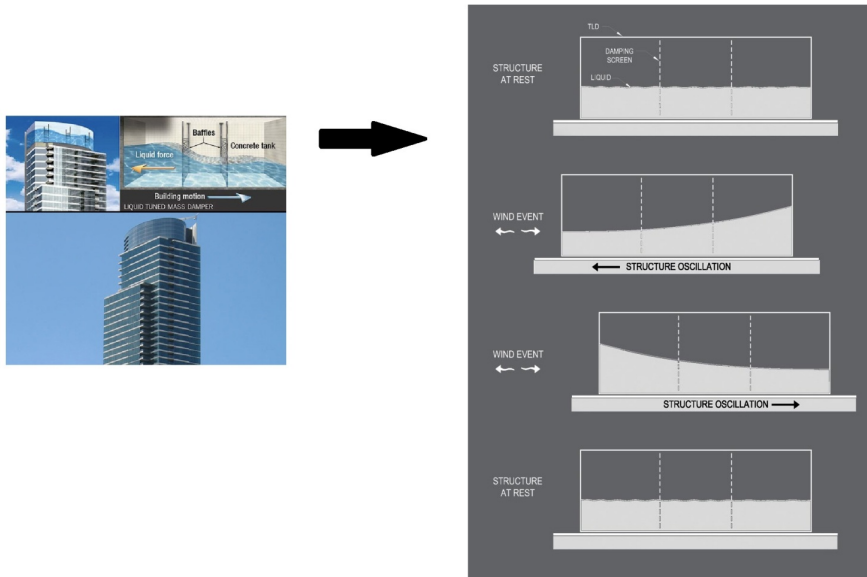


FIGURE 43 – Système de diminution de vibrations, liquid damper *Isfahan University of Technology*, 2015

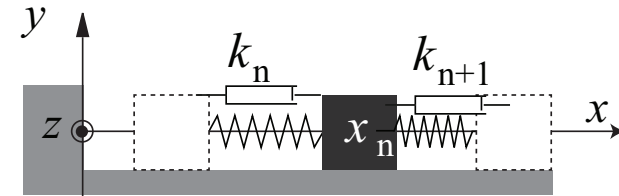


FIGURE 44 – Associations de n ressorts

Considérons un système composé de deux masses accrochées par des ressorts. En notant x_1 et x_2 les allongements ressorts par rapport à leur position d'équilibre, les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - \alpha \dot{x}_1 - \alpha (\dot{x}_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - \alpha (\dot{x}_2 - x_1) \end{cases}$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 2\alpha \dot{x}_1 - \alpha \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 - \alpha \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

Une écriture matricielle permet d'écrire le système d'équation de façon simple en définissant une matrice d'amortissement :

$$C = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Le système précédente s'écrit alors :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + kX = 0$$

b) Résolution

La méthode de résolution est identique à celle vue précédemment avec une inversion de matrice dans \mathbb{C} .

Pour un forçage sur la base, les courbes de réponse sont représentées ci-dessous.

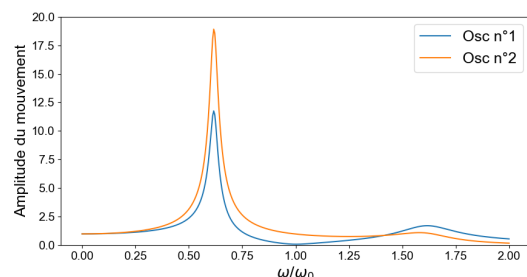


FIGURE 45 – Oscillateurs couplés amortis

5 - Généralisation à n ddl

a) Modélisation

L'étude des fréquences propres d'un bâtiment est un enjeu important. Ces fréquences peuvent être mesurées en installant différents accéléromètres dans la structure et en effectuant des enregistrements.

Il a été montré que l'évolution dans le temps de la fréquence correspond à un vieillissement d'un bâtiment.

Pour certains enregistrements, une baisse permanente de la fréquence propre est imputée à une baisse de rigidité de la structure (la masse n'ayant pas varié) donc à un endommagement alors que cet endommagement n'a parfois pas été constaté visuellement. Cette baisse de fréquence peut donc être utilisée quantitativement pour déterminer si un bâtiment peut être réhabilité ou doit être détruit après un séisme.

Pour les immeubles à plusieurs étages, il est possible de décomposer le problème en plusieurs oscillateurs couplés les uns aux autres. On note m_i la masse équivalente à l'étage étudié et k_i la constante de raideur entre l'étage $i - 1$ et l'étage i .

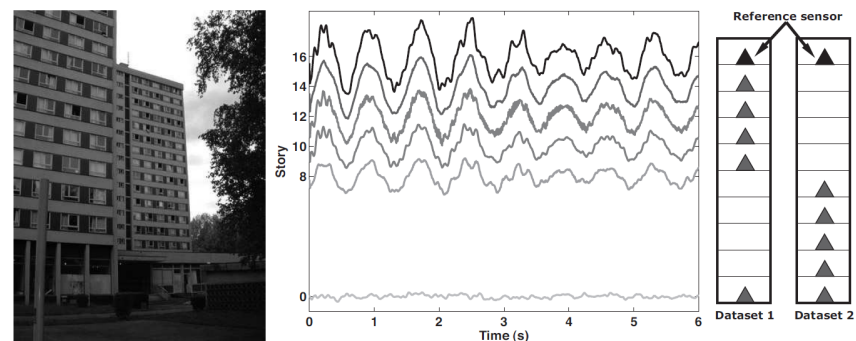


FIGURE 46 – Exemple de stratégie d'enregistrement, le capteur de référence est maintenu au dernier étage entre le premier et le second jeu de données. Les enregistrements (au centre) ont été réalisés dans la tour ARPEJ II (à gauche) sur le campus de Grenoble par Dunand (2005).

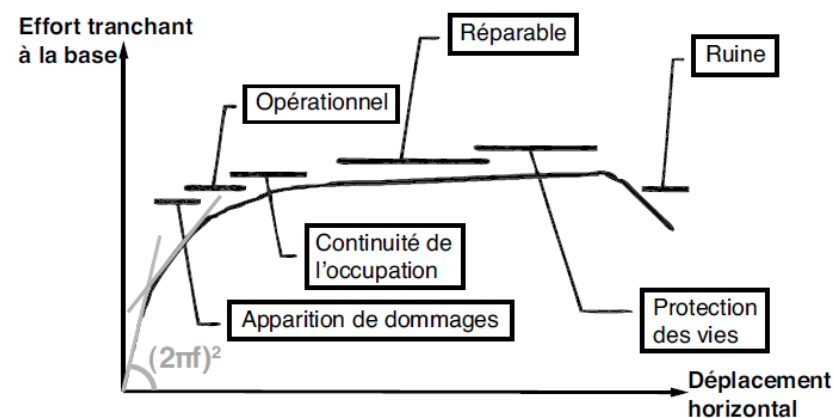


FIGURE 47 – Courbe Force-Déplacement d'un bâtiment sous sollicitation et plages de dommages. La pente de cette courbe donne la rigidité K et est donc proportionnelle au carré de la fréquence. D'après Nazé et al. (2006).

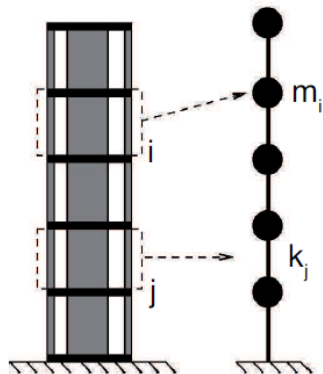


FIGURE 48 – Principe de la discrétisation d'un bâtiment en masses concentrées (m_i) et tiges sans masse de rigidité k_i (brochette de cisaillement). D'après Dunand (2005)

b) Équations du mouvement

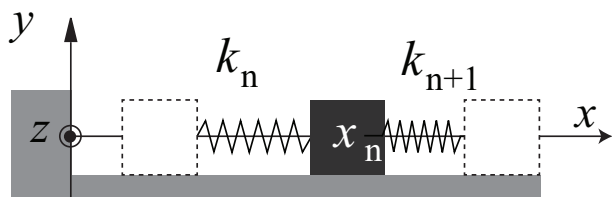


FIGURE 49 – Associations de n ressorts

Notons x_i le déplacement par rapport à sa position d'équilibre de la masse i . L'application du pfd à la masse i s'écrit :

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

On obtient alors l'écriture suivante :

$$m_i \ddot{x}_i + (k_i + k_{i+1})x_i - k_i x_{i-1} - k_{i+1} x_{i+1} = 0$$

Cette équation est valable de $i = 1$ à $i = n$ avec $x_0 = 0$ et $k_n = 0$. Les équations obtenus pour les cas limites s'écrivent :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_n \ddot{x}_n + k_n x_n - k_n x_{n-1} = 0$$

Définissons la matrice des masses et celles des raideurs sous la forme suivante

$$M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & k_n \end{pmatrix}$$

L'écriture du système précédente s'écrit alors :

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

c) Modes propres

Soumis à une sollicitation extérieure, le système formé par les n oscillateurs couplés va répondre en fonction de ces modes propres. On recherche donc des solutions non triviales à l'équation matricielle :

$$(M \times p^2 + K)X(p) = 0$$

M est une matrice diagonale non-nulle donc inversible. K est une matrice symétrique réelle donc inversible. On en déduit que

Il existe une solution non triviale si le déterminant de la matrice $(M \times p^2 + K)$ est nul :

$$\det(M \times p^2 + K) = 0$$

Le problème est identique au cas à 2ddl, il est juste plus calculatoire...

Des logiciels spécialisés permettent également la modélisation complète de la structure et de tenir compte des mouvements selon les différentes directions de l'espace (compression, cisaillement...)

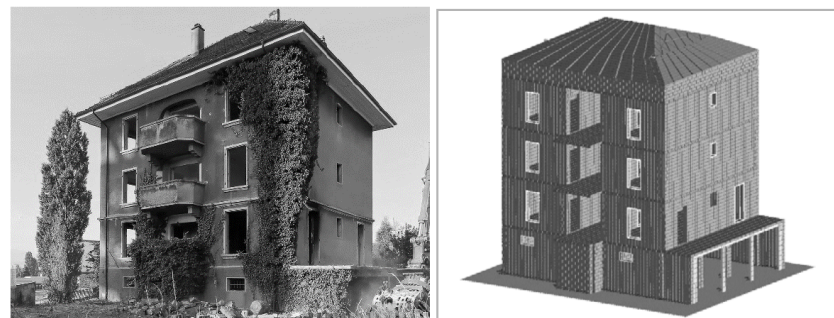


FIGURE 50 – Simulation de l'amplitude du mouvement pour 3 ddl

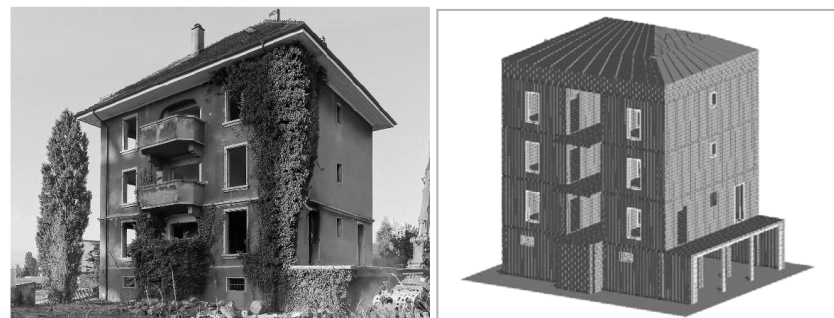


FIGURE 52 – Modélisation de la villa Marguerite à Lausanne modélisée par 1.900.000 ressorts non-linéaire.

III. Propagation des ondes dans les solides

1 - Équation de propagation

Considérons une chaîne d'oscillateurs couplés composée d'une infinité de masse identique notée m reliée à des ressort de longueur à l'équilibre a et de constante de raideur k . On note $x_n(t)$ le déplacement de la n^e masse par rapport à la position d'équilibre.

L'équation différentielle vérifiée par la masse m est donnée par :

$$m\ddot{x}_n(t) = -k_n(x_n(t) - x_{n-1}(t)) - k_{n+1}(x_{n+1}(t) - x_n(t))$$

FIGURE 51 – Simulation de l'amplitude du mouvement pour 4 ddl

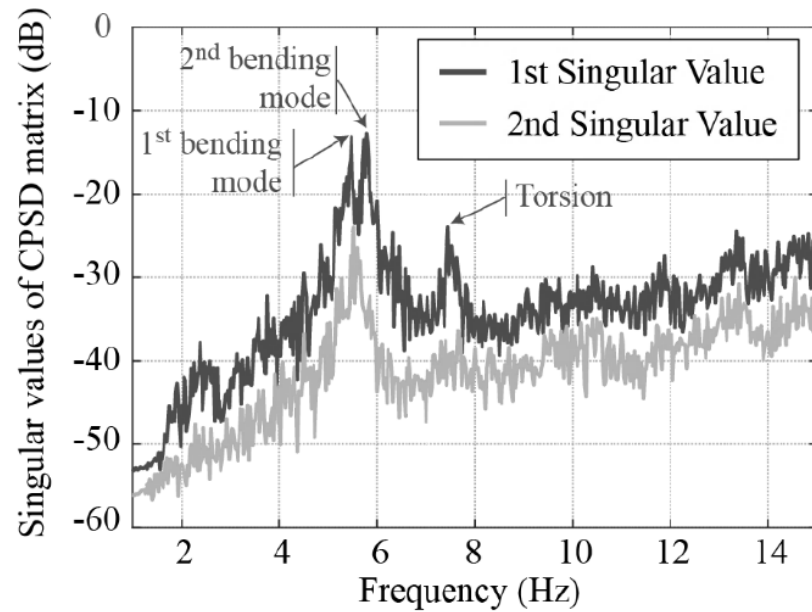


FIGURE 53 – Spectre de la villa Marguerite d'après *Usefulness of ambient vibration measurement for seismic assessment of existings structures, SMAR 2017, fourth International Conference on Smart Monitoring, Assessment and Rehabilitation of Civil Structures, Zurich, Switzerland*

FIGURE 54 – Simulation de l'amplitude du mouvement pour 9 ddl

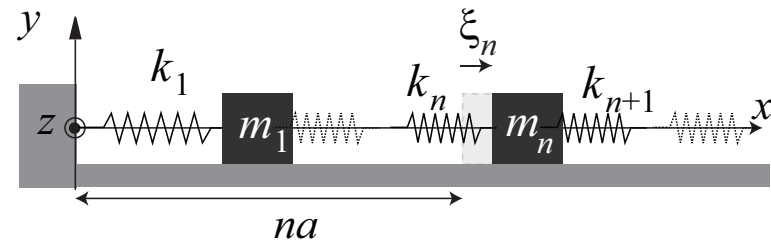


FIGURE 55 – Modélisation d'un solide par n oscillateurs couplés

Les constantes de raideur étant identiques, posons $\omega_0^2 = k/m$, on obtient :

$$\ddot{x}_n(t) + \omega_0^2 (2x_n(t) - x_{n-1}(t) - x_{n+1}(t)) = 0$$

a) Vibrations de réseaux

La périodicité du système nous conduit à chercher une solution de la forme

$$x_n(t) = Ae^{i(qX_n - \omega t)}$$

où X_n est la position d'équilibre de la n^e masse donc $X_n = na$. Cette solution représente une onde propagative pour laquelle chaque masse oscille avec la même fréquence ω et la même amplitude A . C'est un des modes normaux que l'on aurait obtenus par diagonalisation de la matrice représentant la dynamique du système couplé.

L'équation différentielle conduit à

$$-\omega^2 e^{iqna} + \omega_0^2 (2e^{iqna} - e^{iq(n-1)a} - e^{iq(n+1)a})$$

qui conduit à

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 - e^{-iqa} - e^{iqa})$$

et que l'on simplifier en utilisant la relation $1 - \cos(2x) = 2 \sin^2(x)$ pour obtenir

$$\omega = 2\omega_0 \sin^2(qa/2)$$

Cette relation lie la constante de propagation q à la fréquence ω et indique les modes propagatifs possibles dans le réseau unidimensionnel. D'où le nom de relation de dispersion (car la constante de propagation dépend de la fréquence du phénomène). La courbe de dispersion est tracée sur la figure 56. Elle est périodique et on peut donc limiter sa représentation à l'intervalle $-\pi/a \leq q \leq \pi/a$ (appelée première zone de Brillouin). Il n'existe ds modes propagatifs que pour des fréquences inférieures à $2\omega_0$. Pour des réseaux d'atomes cette fréquence maximale est généralement dans l'infrarouge.

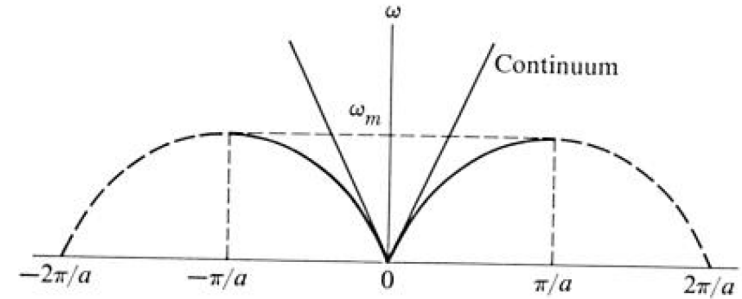


FIGURE 56 – Courbe de dispersion du réseau unidimensionnel. $\omega_m = 2\omega_0$

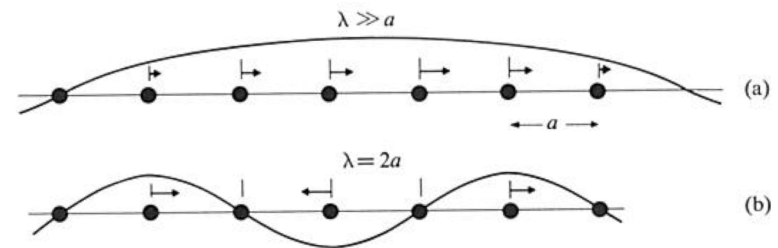
A la limite des basses fréquences (ou grandes longueurs d'ondes), on observe le comportement asymptotique

$$\omega \sim_0 (\omega_0 a) q$$

qui est une relation linéaire entre ω et q . Nous verrons que cela correspond à la description continue du réseau. La vitesse de l'onde est

$$c = \omega/q = \omega_0 a = a\sqrt{k/m}$$

A la limite $\omega \rightarrow 2\omega_0$, le comportement est très différent. En utilisant $\omega = 2\omega_0$ et $q = \pi/a$ la position de la masse n se simplifie selon $x_n(t) = Ae^{i(qna - \omega t)} = Ae^{i(n\pi - 2\omega_0 t)} = (-1)^n Ae^{-2i\omega_0 t}$. Les masses oscillent en opposition de phase (voir figure $q = \pi/a = 2\pi/\lambda$ donc $\lambda = 2a$). Dans



ce cas, les vitesses de phase ($v_\varphi = \omega/q$) et de groupe ($v_g = \partial\omega/\partial q$)

sont différentes (l'emilieu est alors dit dispersif $v_\varphi \neq v_g$. On obtient $v_\varphi(q = \pi/a) = 2a\omega_0/\pi$ et $v_g = 0$. La valeur nulle de la vitesse groupe est due à la présence d'une onde stationnaire dans le réseau (onde propagative et onde réfléchie sur le réseau).

b) Approximation grandes longueurs d'ondes - approximation des milieux continus

Supposons maintenant que la déformation des ressorts ne varie que faiblement devant la distance entre les masses, c'est à dire notons λ l'échelle caractéristiques de variation de la déformation, supposons que

$$\lambda \gg a$$

Il est alors possible de définir une fonction continue $\xi(x,t)$, qui coïncide avec les déformations pour chaque masse :

$$\xi(x = na, t) = x_n(t)$$

L'équation différentielle précédente devient alors :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x = na, t) + \omega_0^2 \left(2\xi(x = na, t) - \xi(x = (n-1)a, t) - \xi(x = (n+1)a, t) \right)$$

Le second terme est en fait une approximation d'une dérivée seconde spatiale. Effectuons un petit rappel de Mathématiques en utilisant les développements limités :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + h^2\varepsilon_1(x, h)$$

$$\frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + h^2\varepsilon_2(x, h)$$

correspondent à deux approximations de $f'(x)$ du 1er ordre en h . En ajoutant les développements précédents, on obtient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = hf''(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + h^2\varepsilon_1(x, h)$$

soit :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h}{3!}f^{(3)}(x) + h\varepsilon_1(x, h)$$

Il est aisé de reconnaître, au signe près, dans l'équation du mouvement, la dérivée seconde spatiale en $x = na$:

$$2\xi(x = na, t) - \xi(x = (n-1)a, t) - \xi(x = (n+1)a, t) = -a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x = na, t)$$

il vient :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Posons $c^2 = \omega_0^2 a^2$, on obtient alors une équation de D'Alembert pour la fonction ξ avec une vitesse de phase définie par $c = a\omega_0$ (en accord avec l'approche discrète aux basses fréquences) :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Remarque 6 :

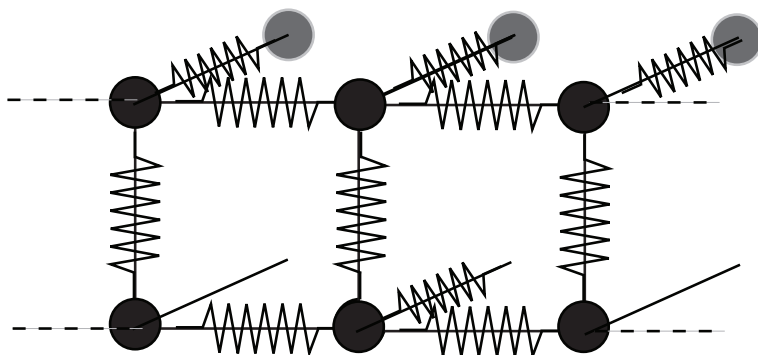
La faible déformation longitudinale d'un solide peut être décrite par une fonction continue qui traduit la propagation d'onde sonore dans le matériau.

2 - Équation des ondes sonores

a) Modélisation d'un solide déformable

Pour modéliser un solide plein, il faut considérer une suite d'oscillateurs couplés dans les 3 directions de l'espace.

Lorsqu'on étire se solide dans une seule direction, l'ensemble des ressorts selon cet axe s'allonge, la déformation suit alors la loi de Hooke.

FIGURE 57 – Modélisation d'un solide par n oscillateurs couplés en 3D

◆ Définition :

La loi de Hooke stipule qu'un solide de section S et de longueur à vide ℓ_0 , soumis à une force F suffisamment faible est déformée d'une longueur $\Delta\ell$:

$$F = ES \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = ES\varepsilon$$

où E est appelé le module d'Young du matériau et ε l'allongement relatif.

Cette loi est similaire à celle d'un ressort et reste dans le cadre d'une théorie linéaire.

ⓘ Remarque 7 :

Il est possible de relier la grandeur macroscopique E à la constante de raideur équivalente entre atomes. Considérons un cube élémentaire de côté a se déformant de x lorsqu'il est soumis à une force F :

$$F = kx = Ea^2 \frac{x}{a}$$

On en déduit que

$$E = k/a$$

Ainsi, le module de Young peut être assimilé à une constante de raideur linéique.

b) Équation de propagation

Ainsi considérons une tranche dx d'un solide plein de section S caractérisé par une masse volumique μ et un module Young E .

Le solide est déformable et on note $\xi(x,t)$ la déformation de la tranche. La déformation infinitésimale est reliée à une force exercée sur chaque face et on note $\vec{F}(x,t)$ la force exercée par la partie droite sur la partie gauche.

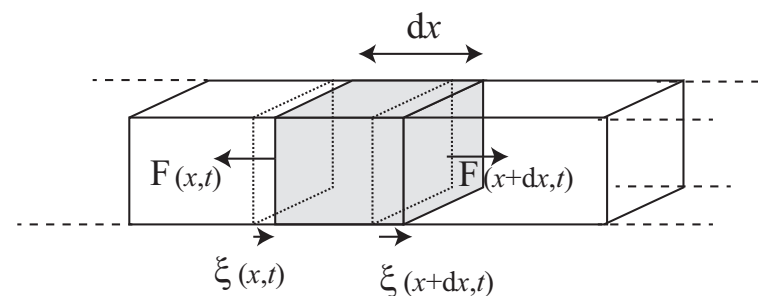


FIGURE 58 – Notations

Une tranche est donc soumise à $\vec{F}(x+dx,t)$ par sa face droite et $-\vec{F}(x,t)$ par sa face gauche. Appliquons le principe fondamental de la dynamique, sur la tranche d'épaisseur dx , il vient :

$$\mu S dx \frac{d^2 \xi}{dt^2}(x, t) \vec{e}_x = \vec{F}(x, t) + \vec{F}(x + dx, t) = [-F(x, t) + F(x + dx, t)] \vec{e}_x$$

soit

$$\mu S \frac{d^2 \xi}{dt^2}(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$$

En utilisant la loi de Hooke, on peut relier la force et le déplacement. La déformation d'un solide est donnée par :

$$\Delta \ell = \xi(x + dx, t) - \xi(x, t)$$

On en déduit que pour une tranche dx :

$$F(x, t) = ES \frac{\Delta \ell}{dx} = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

soit

$$\mu S \frac{d^2 \xi}{dt^2}(x, t) = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert avec comme vitesse de phase

$$c = \sqrt{E/\mu}$$

:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(x, t) = 0$$

Les ondes décrites par cette équation sont des ondes de compression, appelée type P en sismologie.

On trouve dans la littérature : $E_{Al} = 69.10^9 \text{ N.m}^{-2}$ et $\mu = 2,7.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, on obtient :

$$c = 5,0.10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

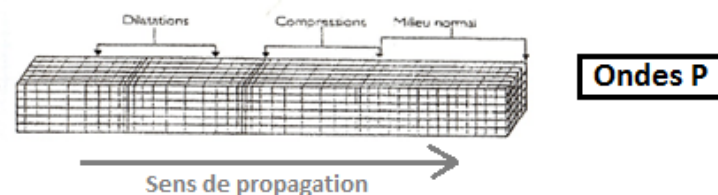


FIGURE 59 – Ondes de compression, type P en sismologie

Remarque 8 :

Une déformation en « cisaillement », c'est à dire une translation du plan inférieur par rapport au plan supérieur conduit également à une équation de propagation, ces ondes sont appelées S en sismologie (voir page 60).

Propriété :

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\xi(x, t) = f(x \pm ct)$$

Propriété :

Les solutions harmoniques de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\xi(x, t) = \cos(\omega t \pm kx)$$

c) Ouverture : propagation dans des métamatériaux

Un métamatériau désigne des milieux artificiels, en général structurés de manière périodique, dont les propriétés électromagnétiques ou acoustiques peuvent être différentes des matériaux homogènes.

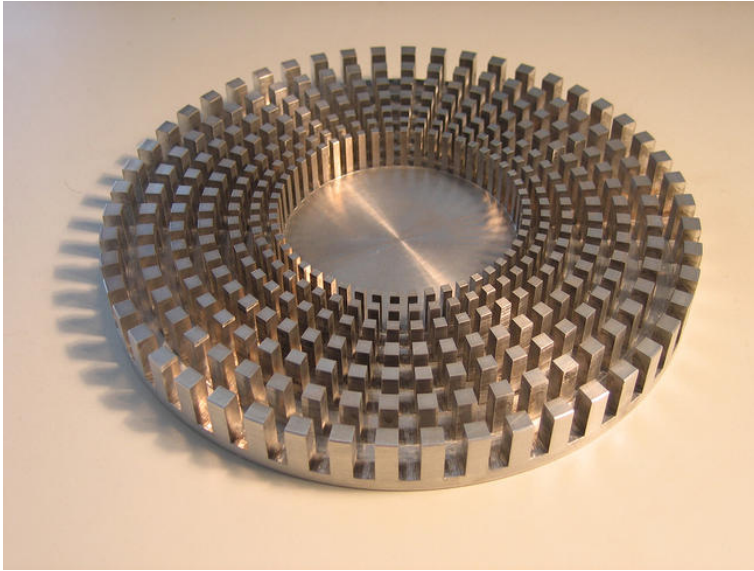


FIGURE 60 – Application du dispositif de cape d’invisibilité pour protéger un immeuble en cas de séisme *Stefan ENOCH/CNRS Photothèque video* : <https://www.dailymotion.com/video/x4vzf5r>

Cette structure hérissée de petits plots est un prototype de cape d’invisibilité. Le métamatériau utilisé se comporte comme un fluide anisotrope forçant les vagues à contourner la zone centrale. Ce type de structure pourrait servir à préserver certaines zones côtières de l’érosion ou protéger certaines installations maritimes des lames de fond.

Les ondes sismiques peuvent également être modifiées avec les lentilles de Luneburg agissant comme une lentille optique.

lien vers quelques vidéos :

<https://metaforet.osug.fr/>

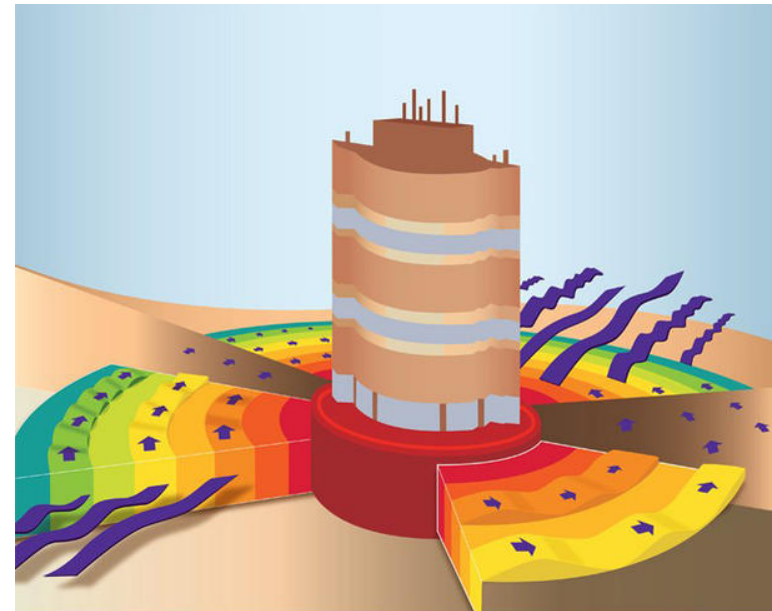


FIGURE 61 – Application du dispositif de cape d’invisibilité pour protéger un immeuble en cas de séisme *CNRS/INSTITUT FRESNEL*

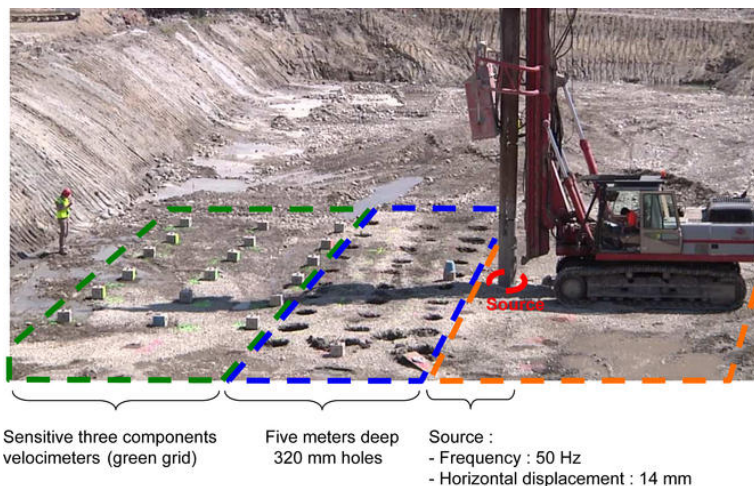


FIGURE 62 – Essai grandeur nature avec l’équipe de Stéphane Brûlé, la Société Ménard. Déclenchement d’un microséisme par laché d’une masse de 17 tonnes depuis une hauteur de 20 mètres! Résultat : " Notre métamatériau géant a agi comme une cape d’invisibilité en déviant les ondes sismiques de part et d’autre de la zone centrale à protéger ", se félicite Sébastien Guenneau *PRL 2014, Experiments on Seismic Metamaterials : Molding Surface Waves*

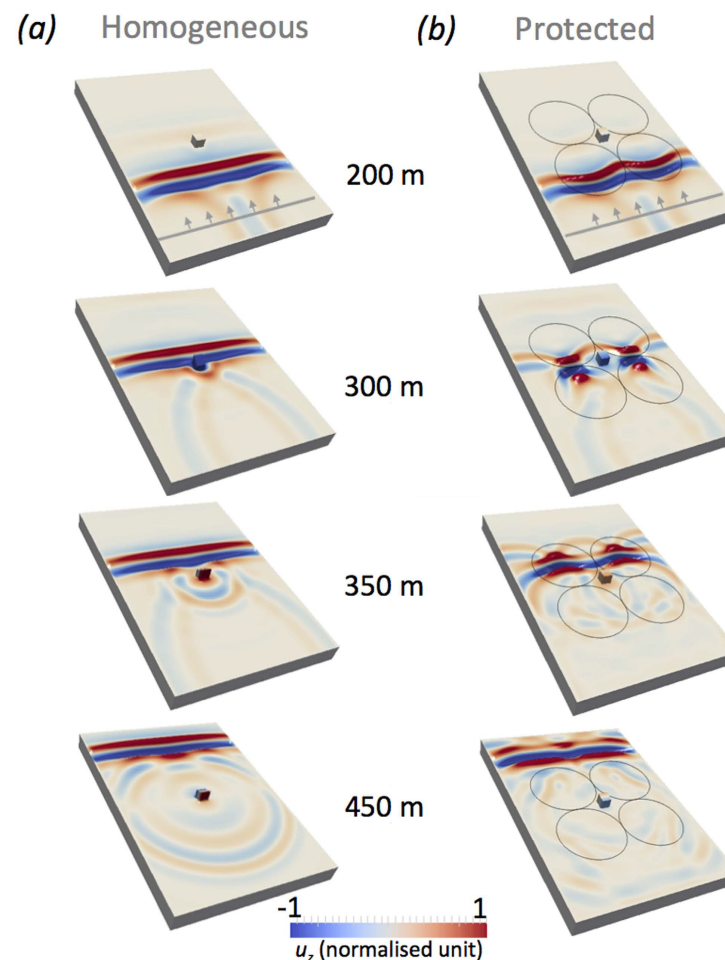


FIGURE 64 – Lentilles de luneburg *Transformation seismology : composite soil lenses for steering surface elastic Rayleigh waves, Nature 2016*

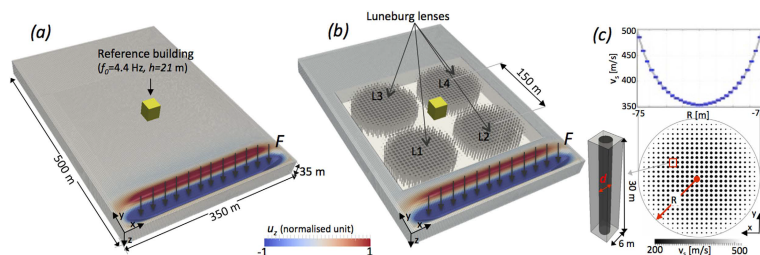


FIGURE 63 – Lentilles de luneburg *Transformation seismology : composite soil lenses for steering surface elastic Rayleigh waves, Nature 2016*

3 - Modes de vibrations longitudinales

La superposition d'ondes propagatives et contra-propagatives conduit à l'apparition de modes de vibration.

Propriété :

Avec des conditions aux limites fixés, les solutions de l'équation de d'Alembert sont des ondes stationnaires

La solution générale est alors une superposition des modes propres dont la forme est la suivante :

$$\xi(x,t) = A \cos \omega t \sin kx + B \cos \omega t \cos kx$$

Pour un système de longueur L, lorsque les conditions aux limites imposent des déplacements nuls aux extrémités, les différents modes sont donnés par

$$B \cos k \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \sin kL = 0$$

On obtient alors :

$$k = n \frac{\pi}{L}$$

La représentation des premiers modes est sur la figure ci-dessous.

Si une des extrémités est libre, la force à l'extrémité est nulle. Les nouvelles conditions limites sont données par :

$$\xi(x=0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(x=L,t) = 0$$

$$\sin k0 = 0 \quad \text{et} \quad \sin kL = 0$$

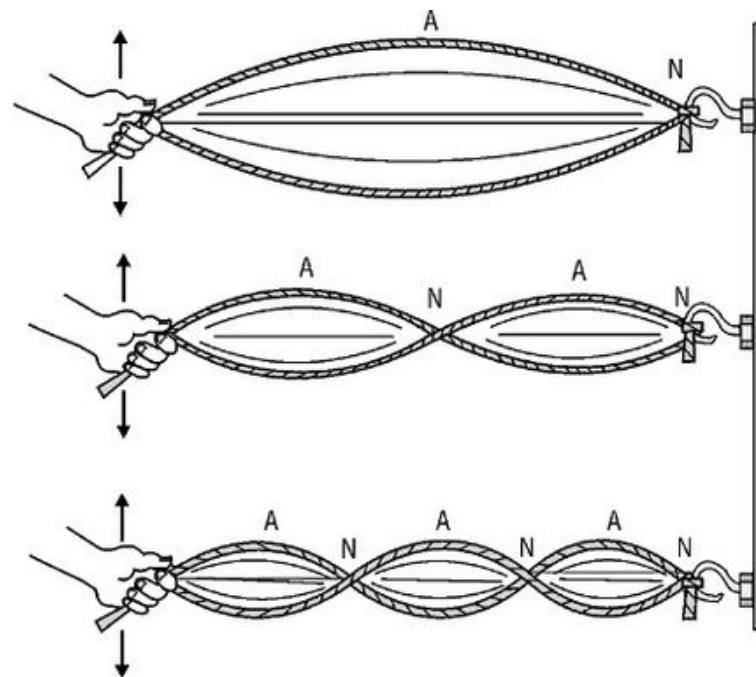


FIGURE 65 – Modes de vibration pour une corde de Melde

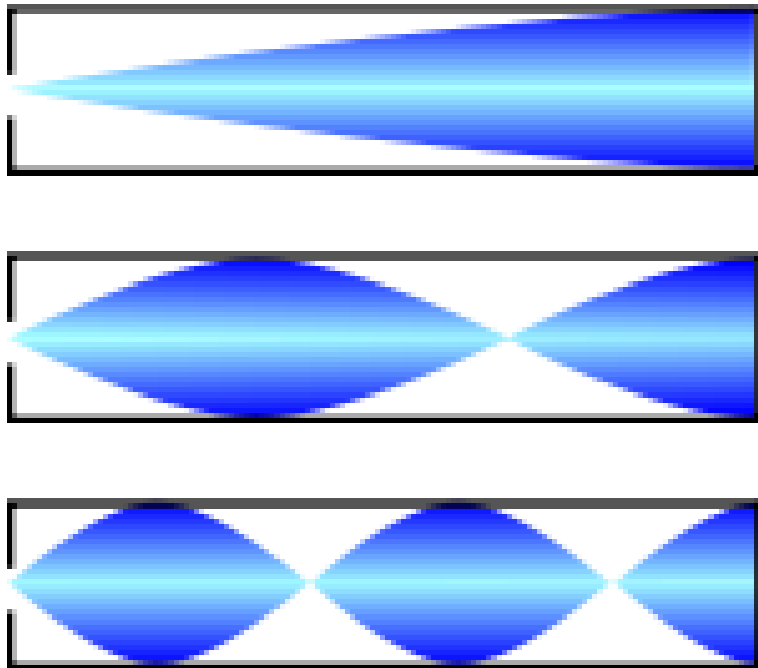


FIGURE 66 – Modes de vibration pour une corde de Melde

Deuxième partie

Physique du Solide : du microscopique au macroscopique

I. Vibration de réseau : propriétés thermiques, acoustique et optiques

Nous avons discuté précédemment des propriétés générales des vibrations mécaniques : oscillations, résonance et propagations. L'objet de cette partie est de présenter les propriétés physiques des solides et d'interpréter leur origine microscopique. Dans un premier temps, nous présentons les propriétés thermiques, acoustiques et optiques des solides décrit comme un assemblage périodique d'atomes ou de molécules (réseau cristallin). La dernière partie sera consacrée à une description plus détaillée des réseaux et une discussion du lien entre matériau et propriétés mécaniques.

1 - Ondes élastiques

La propagation d'onde dans un réseau atomique a déjà été vue au §III (p 30 et suivantes). Nous avons établi la relation de dispersion de l'onde acoustique et discuté des comportements aux limites basses fréquences (ondes élastique et approximation des milieux continus) et haute fréquence (onde stationnaire). Dans la suite, nous considérons les ondes élastiques uniquement.

Densité d'états dans le milieu continu Considérons une onde élastique le long d'une barre (onde longitudinale¹). Nous avons établi l'équation de propagation est

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v_e^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(x, t) = 0$$

où $\xi(x, t)$ représente le déplacement longitudinal de la matière à la position x et à l'instant t . Les solutions sont de la forme

$$\xi(x, t) = Ae^{i(qx - \omega t)}$$

1. il existe aussi une onde transverse comme discuté plus tard.

où q est le vecteur d'onde et ω la fréquence. Dans le régime élastique, q et ω sont reliés par la relation de dispersion $q = \omega/v_e$ avec v_e la vitesse de propagation. Nous cherchons à établir la densité de modes supportés par la barre. On cherche le nombre de modes (onde stationnaire) disponibles dans l'intervalle $[\omega; \omega + d\omega]$. Cela revient à compter les modes dans une barre de longueur L (arbitraire, intermédiaire de calcul).

La barre étant de longueur finie, cela impose les conditions limites $\xi(x=0, t) = \xi(x=L, t)$ donc $e^{iqL} = 1$ puis

$$q = n \frac{2\pi}{L}, n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$$

Chaque valeur de q représente un mode de vibration.

Cherchons le nombre de modes compris dans l'intervalle $[q; q + dq]$ du réseau réciproque.

Dans l'espace des q , un mode occupe une "q-longueur" $\Delta q = 2/L$. D'où le nombre de mode dans l'intervalle $[q; q + dq]$ de longueur dq :

$$dN_q = \frac{dq}{\Delta q} = 2 \times \frac{L}{2\pi} dq$$

où le facteur 2 tient compte des ondes propagatives ($q > 0$) et contra-propagative ($q < 0$).

Pour déterminer le nombre de modes par unité de fréquence, on utilise la relation de dispersion entre q et ω . Ainsi, $dq = d\omega/v_e$ et

$$dN_q = \frac{L}{\pi v_e} d\omega = g(\omega) d\omega$$

$g(\omega) d\omega$ représente le nombre de mode dans l'intervalle $[\omega; \omega + d\omega]$; $g(\omega) = \frac{L}{\pi v_e}$, puis la densité d'états par unité de longueur

$$g_{1D}(\omega) = \frac{1}{\pi v_e}$$

Dans le cas 3D, les ondes sont de la forme $\xi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} = Ae^{i(q_x x + q_y y + q_z z - \omega t)}$. Un raisonnement analogue conduit à la densité d'états

$$g_{3D}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 v_e^3}$$

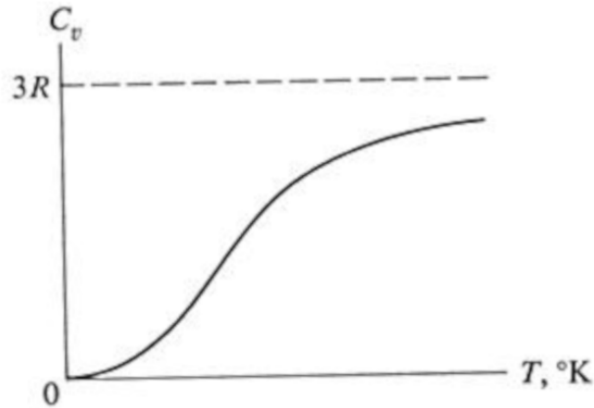
2 - Propriétés thermiques

a) Capacité thermique

La capacité thermique est l'énergie qu'il faut transférer à un corps pour augmenter sa température d'un kelvin. La capacité thermique à volume constant vaut

$$C_v = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v.$$

Son évolution avec la température est indiquée sur la figure. $C_v \approx 3R \approx 25 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ pour des températures élevées (incluant la température ambiante). Cette valeur ne dépend pas de la nature du (loi de Dulong-Petit). Lorsque la température diminue, C_v aussi et s'annule au 0 absolu. On peut montrer que $C_v \propto T^3$ aux basses températures. Considérons tout d'abord



une approche classique pour interpréter ce comportement. Lorsque le solide est chauffé, les atomes oscillent autour de leur position d'équilibre. L'énergie moyenne d'un oscillateur unidimensionnel est $\varepsilon = kT$ où T est la constante de Boltzmann. Et pour un mouvement dans les 3 dimensions, $\varepsilon = 3kT$. D'où l'énergie par mole $Q = 3N_A kT = 3RT$. On en déduit immédiatement $C_v = 3R$ comme attendu pour les hautes températures. Par contre cela n'explique pas le comportement basse température.

Modèle d'Einstein Dans l'approche quantique, l'énergie de chaque oscillateur atomique est discrétisée selon $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, $n = 0, 1, \dots$. Dans un solide, les atomes échangent de l'énergie avec le milieu environnant. L'énergie de chaque oscillateur atomique évolue donc continuellement mais sa valeur moyenne à l'équilibre thermique est donnée par la loi de Boltzmann

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}} \\ &= \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \end{aligned}$$

en utilisant $\varepsilon_n = n\hbar\omega$. On vérifie $\varepsilon \simeq kT$ pour $kT \gg \hbar\omega$ et on retrouve le comportement classique aux hautes températures. Par contre, aux basses températures, $\varepsilon \rightarrow 0$ pour $kT \ll \hbar\omega$. Les oscillations atomiques sont gelées à basse température.

Pour des oscillations dans les 3 directions, on a

$$\varepsilon = 3N_A \frac{\hbar\omega_E}{e^{\hbar\omega_E/kT} - 1}$$

où ω_E désigne la fréquence associée à l'ensemble des oscillations atomiques. La capacité thermique s'en déduit

$$C_v = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v = 3R \left(\frac{\hbar\omega_E}{kT} \right)^2 \frac{\hbar\omega_E}{(e^{\hbar\omega_E/kT} - 1)^2}$$

Modèle de Debye Le modèle d'Einstein reproduit assez fidèlement les résultats expérimentaux mais sous-estime légèrement le comportement à basse température. Cela est dû au fait que les oscillations atomiques sont considérées indépendantes les unes des autres alors que l'oscillation d'un atome perturbe nécessairement celle de ses voisins. Il faut donc considérer les oscillations collectives de l'ensemble des atomes. Debye a supposé que le caractère collectif a pour origine les ondes élastiques qui couplent les oscillations atomiques. L'énergie de vibration du réseau est alors

$$Q = \int \varepsilon g(\omega) d\omega$$

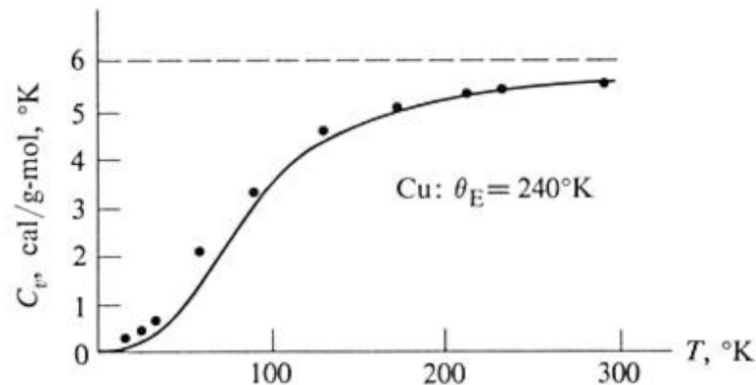


FIGURE 1 – Capacité thermique du cuivre $C_v(T)$. Les points représentent les données expérimentales et la courbe est ajustement avec θ_E défini tel que $\hbar\omega_E = k\theta_E$.

qui tient compte du nombre de modes disponibles. Alors

$$Q = \frac{3}{\pi^2 v_e^3} \int \omega^2 \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega$$

. On ne détaille pas les calculs mais on peut alors mettre C_v sous la forme

$$C_v(T) = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

où θ_D désigne la température de Debye (paramètre d'ajustement). Cette température est de l'ordre de $\theta_D \simeq \sqrt{E/M}$ où E est le module de Young du matériau et M sa masse molaire. Ainsi, plus le module de Young est élevé ou plus sa masse molaire est faible, et plus sa température de Debye (au-delà de laquelle $C_v \simeq 3R$) est élevée.

b) Conductivité thermique

Lorsque les 2 extrémités d'un échantillon sont à des températures différentes T_1 et $T_2 > T_1$, il se crée un flux de chaleur le long du gradient de température (de l'extrémité chaude vers la froide).

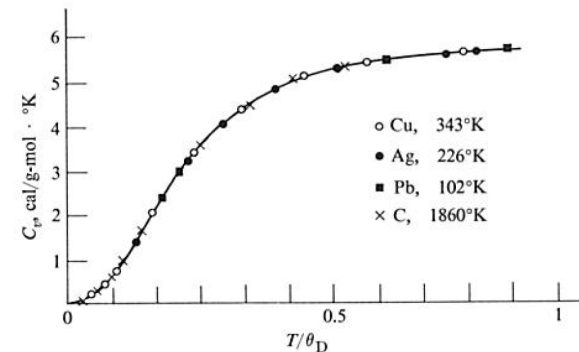


FIGURE 2 – Capacité thermique - modèle de Debye.

SiO ₂	$\kappa = 14 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Si	$\kappa = 150 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

TABLE 1 – Conductivité thermique à $T=273 \text{ K}$.

La densité de flux de chaleur est

$$\vec{j}_{th} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

, κ est la conductivité thermique du matériau et caractérise sa facilité à conduire la chaleur. L'origine microscopique de transmission de chaleur dépend du type de matériaux. Dans le cas de métaux, le transfert de chaleur est assuré par à la fois les déplacements des électrons et les vibrations du réseau atomique (onde acoustique). Dans les isolants, seules les ondes acoustiques sont responsables du transfert de chaleur.

Lorsque seul le transfert via les vibrations atomiques sont considérées, on peut montrer que $\kappa = C_v v_e l / 3$ où l désigne le libre parcours moyen. Ainsi, la conduction de chaleur est d'autant plus efficace que i) la capacité thermique est élevée (assurant un échauffement efficace), ii) la distance de propagation moyenne de l'onde $v_e l$ est grande.

Finalement, on observe que les propriétés mécaniques et thermiques d'un matériau solide sont intimement liées.

II. Structure et propriétés des solides - Propriétés mécaniques

Classe de matériaux

- les métaux et leurs alliages (liaisons métalliques) ;
- les polymères organiques (liaisons covalentes et liaisons secondaires) ;
- les céramiques (liaisons ioniques et liaisons covalentes).

Pour comprendre le comportement des matériaux, il faut établir la liaison entre des phénomènes qui se déroulent à l'échelle microscopique et submicroscopique et les propriétés du matériau. Cette liaison met en relation des phénomènes qui se déroulent à des échelles faisant intervenir neuf ordres de grandeur (du nanomètre 10^{-9} m - au mètre). Les éléments de la microstructure d'un matériau sont en général définis par plusieurs paramètres :

- composition ;
- arrangement atomique ;
- quantité relative ;
- morphologie ;
- taille

1 - Liaisons chimiques et forces de cohésion

a) Liaisons chimiques

Définition :

Liaisons chimiques Il est commode de faire la distinction entre liaisons ionique, covalente, métallique et secondaire. Il ne faut cependant jamais perdre de vue que ces modèles constituent des cas limites et que la réalité physique plus complexe est intermédiaire entre ceux-ci. Les électrons qui interviennent dans la liaison chimique appartiennent en général à la couche électronique externe de l'atome, qui est plus faiblement liée au noyau (électrons de valence). Les forces de liaison, qui sont essentiellement de nature électrostatique, résultent d'une redistribution plus ou moins importante des électrons de valence autour des noyaux atomiques impliqués dans la liaison.

Liaison ionique Lorsqu'on associe des atomes ayant une faible énergie d'ionisation (électropositifs) comme les métaux alcalins (Li, Na, K...) et des éléments ayant une grande électroaffinité (électronégatifs) comme les halogènes (F, Cl, Br...), on observe que les premiers ont tendance à perdre un électron et à former un ion positif, tandis que les seconds sont prédisposés à gagner un électron afin de compléter leur couche électronique extérieure et de former un ion négatif. La liaison ionique résulte de l'association d'ions positifs et d'ions négatifs. Ainsi, lors de la réaction d'un métal alcalin avec un halogène, on observe le transfert d'un électron du métal alcalin vers l'halogène qui entraîne la formation d'un cation et d'un anion. Ex : NaCl, CaCl₂

Exemple 5 :

Modèle électrostatique

- Energie potentielle électrostatique

$$E_p(R) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

- Non interpénétration des ions à courte distance. Modèle empirique de répulsion en b/R^n .

Bilan

$$E(R) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{b}{R^n}$$

Distance d'équilibre R_0 impose b . Finalement, l'énergie à l'équilibre

$$E(R_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

La comparaison avec les résultats expérimentaux permet d'évaluer $n = 9$. Par rapport au modèle des sphères dures, ce modèle n'est pas plus physique. Il a toutefois l'avantage de donner une courbe d'énergie potentielle sans point anguleux, ce qui est plus commode mathématiquement.

Liaison covalente La liaison covalente résulte de la mise en commun d'une ou de plusieurs paires d'électrons par deux atomes dont la couche électronique externe est incomplète. Cette paire devient commune aux deux atomes qui complètent ainsi leur couche électronique externe qui acquiert la configuration des gaz rares. La liaison covalente, comme la liaison ionique, résulte d'une redistribution des électrons qui entraîne une

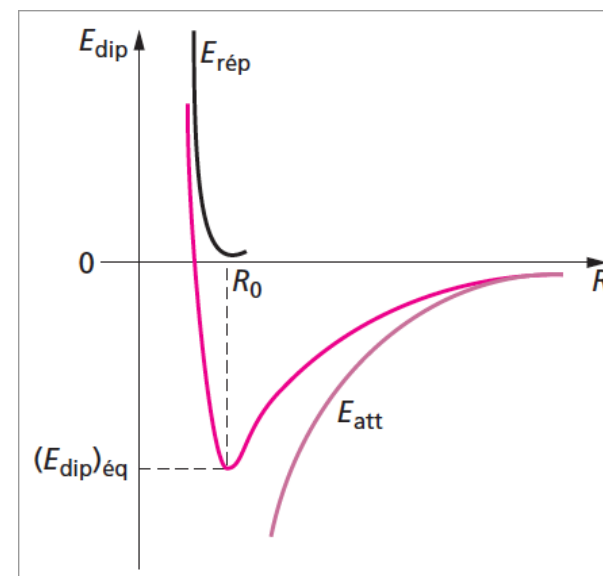


FIGURE 3 – Énergie potentielle totale dans le modèle où la répulsion est en $1/R^n$.

diminution de l'énergie globale du système. Nous avons vu que la liaison ionique résulte d'un transfert d'électrons d'un atome à faible énergie d'ionisation vers un atome à forte électroaffinité. Dans le cas de la liaison covalente, qui lie deux atomes identiques, il n'y a aucune raison, a priori, d'avoir un transfert d'électrons préférentiel, car deux atomes identiques ont la même énergie d'ionisation et la même électroaffinité. Dans ce cas, la liaison résulte du partage des électrons périphériques des atomes qui se déplacent sur des orbitales communes (orbitales moléculaires - OM) aux deux atomes. La formation de ce type de liaison ne peut s'expliquer que sur la base de la théorie quantique. Les orbitales moléculaires (OM) s'obtiennent par combinaison linéaire des orbitales atomiques (OA). Ex : H_2 (OM liante, antiliante), CH_4 ,

Exemple 6 :

Remarque : Les liaisons fortes covalentes ou ioniques sont des cas limites. Il existe tous les intermédiaires, pour lesquels on parle de liaison iono-covalente, c'est-à-dire partiellement ionique et partiellement covalente. Ex H_2O + moment dipolaire

Liaison métallique Les métaux, qui forment presque les trois-quarts des éléments, sont caractérisés par une faible énergie d'ionisation et une faible électroaffinité. Les électrons de valence, qui sont très peu nombreux, sont donc très faiblement liés au noyau de l'atome métallique. En pratique, les électrons de valence ne sont pas liés à un atome déterminé, mais ils sont délocalisés et répartis dans l'ensemble du métal. La liaison métallique est donc caractérisée par une structure d'ions positifs noyés dans un gaz d'électrons. Ce gaz d'électrons assure la liaison entre les ions positifs. La liaison métallique est une liaison forte qui agit de manière identique (isotrope) dans toutes les directions de l'espace. Ce type de liaison favorise la création de structures cristallines simples, de grande symétrie et très compactes. C'est la présence d'électrons mobiles qui permet d'expliquer la conductivité électrique et thermique élevée des métaux.

Tous les éléments à gauche de la diagonale B/Si/As du tableau de la classification périodique se lient entre eux par des liaisons métalliques. Les groupes IA (alcalins) et IIA (alcalino-terreux) donnent des métaux mous, à bas points de fusion, très oxydables et sensibles à l'humidité. Les métaux de transition sont plus durs (ce qui indique des liaisons plus fortes) mais restent plastiques, d'où leur utilisation comme matériaux dans beaucoup de constructions que permet leur mise en forme.

Liaisons secondaires

Définition :

Liaisons secondaires Les liaisons fortes comme la liaison covalente entraînent un déplacement important des électrons de valence. À côté des liaisons fortes dont nous venons de parler, il existe des liaisons faibles qui mettent en jeu des énergies comprises entre 4 et $40 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Celles-ci sont donc d'au moins un ordre de grandeur plus faibles que celles des liaisons covalentes. Les liaisons faibles n'induisent qu'un changement minime de la position des électrons. Les forces de liaisons secondaires résultent surtout d'interactions électrostatiques entre dipôles électriques.

1. liaison hydrogène (eau, ADN, polyamide)
2. Les liaisons de van der Waals proviennent de l'attraction entre dipôles électriques permanents (pour les molécules polaires) ou induits dans les atomes ou molécules. Ce sont des liaisons non dirigées, dont l'énergie potentielle d'attraction est de la forme

$$E_{vdW}(R) = -\frac{A}{R^6}$$

où A dépend des molécules particulières. On voit par cette expression que ces liaisons décroissent très vite avec la distance R entre atomes ou molécules.

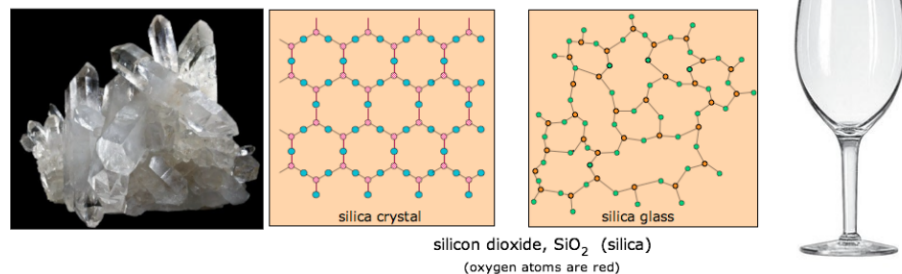
Potentiel de Lennard-Jones (lorsque les atomes s'attirent via des interactions dipolaires de type van der Waals)

$$E(R) = \frac{b}{R^{12}} - \frac{A}{R^6}$$

b) Forces de cohésion

c) Exemple illustratif : la fibre de carbone

2 - Structure des solides



a) Solides amorphes

Atomes disposés aléatoirement. Cependant, un certain degré d'ordre à courte distance peut être mis en évidence pour des raisons d'encombrement stérique entre atomes voisins.

b) Solides cristallins

Réseau cristallin Les cristaux sont des solides qui sont constitués par des édifices réguliers d'atomes, d'ions ou de molécules, liés entre eux par les différents types de liaisons chimiques. On sait que ces liaisons peuvent être très faibles (le cristal d'argon n'existe qu'en dessous de -189°C sous la pression atmosphérique) ou très forte (cristal de carbone sous forme diamant).

Un cristal parfait est un cristal sans défaut, c'est-à-dire sans défaut dans la régularité, et constitué d'un très grand nombre d'atomes, de façon à ce que la surface externe, qui est aussi un défaut dans la régularité, soit négligeable par rapport à l'étendue du volume cristallin. Un cristal de 1 cm^3 est pratiquement infini : il contient de l'ordre de 10^{23} atomes. Nous ne considérerons que des cristaux parfaits mais la présence de défauts est

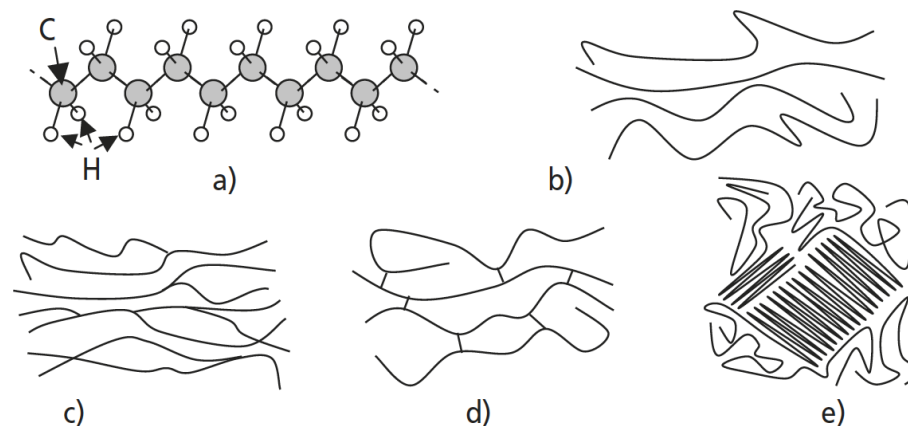


FIGURE 4 – Structure des solides macromoléculaires. a) Disposition tridimensionnelle des atomes de carbone et d'hydrogène dans la chaîne d'une molécule de polyéthylène. b) Schéma d'un ensemble de macromolécules linéaires. c) Macromolécules linéaires ramifiées. d) Macromolécules réticulées. e) Macromolécules linéaires partiellement cristallisées (seules sont schématisées les liaisons fortes covalentes).

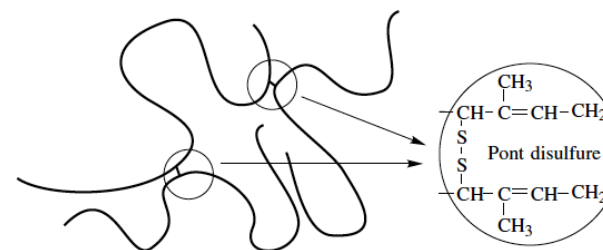


FIGURE 5 – Structure des liaisons pontales (pont disulfure) dans le polyisoprène 1-4 cis (caoutchouc naturel) vulcanisé au soufre tel qu'on le trouve dans les pneumatiques de voiture.

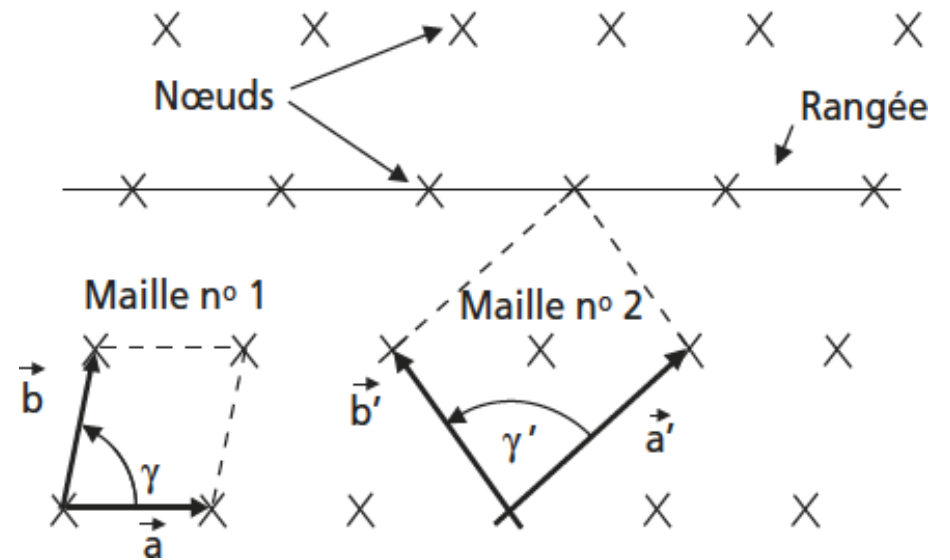
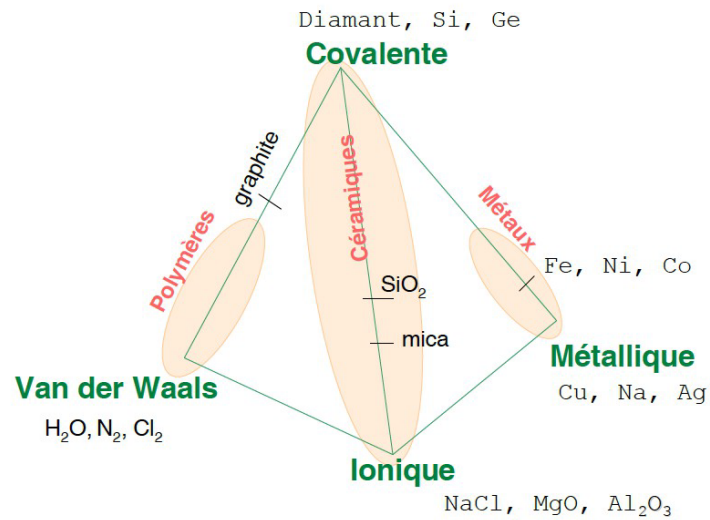
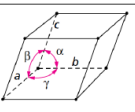
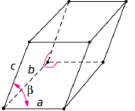
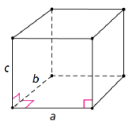
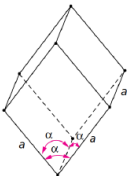
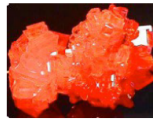
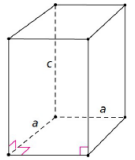
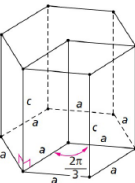
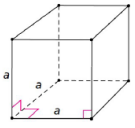


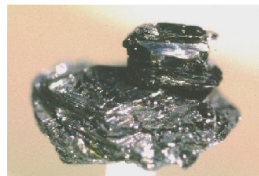
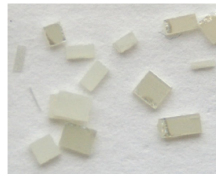
FIGURE 6 – Schéma d'un réseau à deux dimensions. La maille 1 est un exemple de maille élémentaire (un noeud par maille) ; la maille 2 est un exemple de maille multiple.

importante pour certaines propriétés des solides (plasticité, conduction ionique, semiconduction extrinsèque, etc.).

Système	Forme d'une maille caractéristique	Exemple
triclinique	$a \neq b \neq c \neq a$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ (tous $\neq 90^\circ$)	 <chem>K2Cr2O7</chem>
monoclinique	$a \neq b \neq c \neq a$ $\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	 <chem>AsFeS</chem>
orthorhombique	$a \neq b \neq c \neq a$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	 <chem>BaSO4</chem>
rhomboédrique	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	 calcite <chem>CaCO3</chem>



quadratique	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	 rutile <chem>TiO2</chem>
hexagonal	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	 graphite
cubique	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	 <chem>NaCl</chem>



▲ Définition :

Réseau cristallin Ensemble tridimensionnel de points imaginaires, les noeuds, disposés de manière périodique dans les trois directions de l'espace. Il peut être généré par répétition, un nombre entier de fois, de trois vecteurs de base qui définissent une maille élémentaire du réseau d'origine arbitraire. Les noeuds du réseau sont donc tous les points de l'espace de coordonnées entières dans la base choisie. Les noeuds s'ordonnent en rangées et en plans réticulaires.

Motif En attachant de la matière (atomes, ions, molécules) au réseau, de façon à respecter sa tri périodicité, on engendre un cristal.

▲ Définition :

Direction et plan cristallographiques

- direction cristallographique : ensemble des rangées d'atomes parallèles et orientées dans une même direction. Une direction cristallographique peut être repérée par ses indices entre crochets [h,k,l].
- plan cristallographique : ensemble des plans atomiques parallèles équidistants possédant une orientation donnée et une distance caractéristique donnée. Repéré par ses indices (« indices de Miller ») entre parenthèses (h,k,l).

Cristaux moléculaires Dans les cristaux moléculaires, l'individualité de la molécule est conservée dans l'édifice cristallin. Les molécules (ce sont des atomes dans le cas des gaz inertes) sont liées entre elles par des liaisons de van der Waals ou des liaisons hydrogène. L'énergie de cohésion

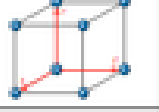
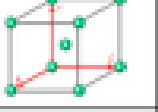
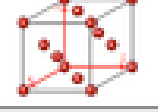
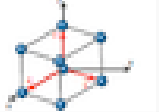
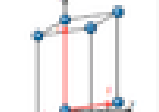
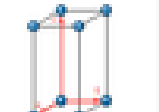
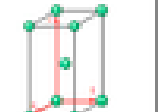
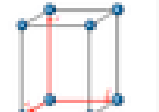
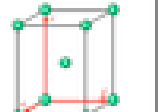
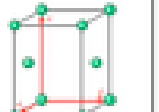
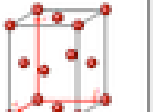
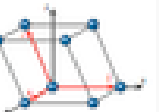
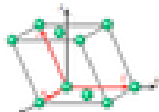
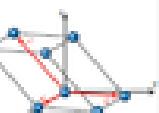
Multiplicité	m = 2			m = 4
	m = 1	Centré (C)	Bases centrées (C)	
Type de réseau	Primitif (P)	Centré (C)	Bases centrées (C)	Faces centrées (F)
Cubique $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma$				
Rhombodrique $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$				
Hexagonal $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$				
Quadratique $a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Orthorhombique $a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Monoclinique $a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$				
Triclinique $a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$				

FIGURE 7 – Les 14 réseaux de Bravais

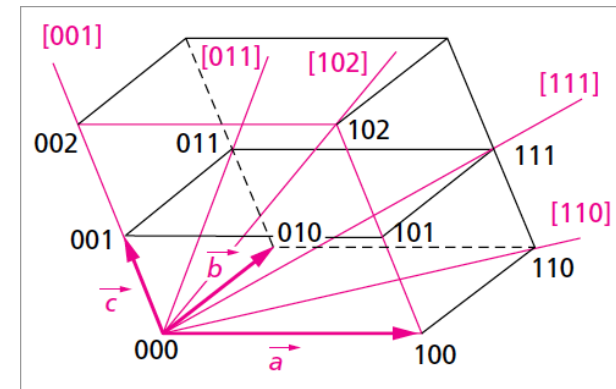


FIGURE 8 – Exemples de rangées

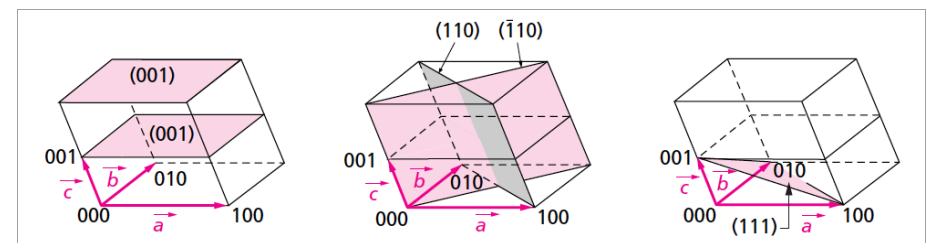


FIGURE 9 – Exemples de plans réticulaires

est l'énergie qu'il faut fournir pour disperser les molécules individuelles et s'identifie à l'énergie de sublimation. Ces cristaux donnent des vapeurs formées de molécules stables. H_2 , O_2 , N_2 , S_8 , P_4 , les molécules des halogènes, les molécules de la chimie organique, cristallisent à basse température en cristaux moléculaires. Les points de fusion et d'ébullition sont bas (N_2 : respectivement 63 K et 77 K ; O_2 : 54,4 K et 90 K). À basse température,

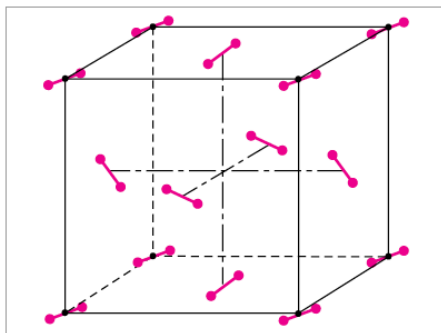


FIGURE 10 – H_2 solide à une température inférieure à 1,3 K (cristal moléculaire).

les molécules ont des vibrations de faible amplitude sur leur site dans le réseau. Puis, à une température plus élevée, elles se mettent progressivement à tourner sur elles-mêmes. La température augmentant, l'amplitude des vibrations augmente jusqu'à ce que l'énergie d'agitation thermique soit suffisante pour que le cristal se disloque, les molécules étant plus indépendantes et irrégulièrement disposées, quoiqu'elles restent sensiblement à la même distance les unes des autres : c'est la fusion.

Cristaux covalents Les cristaux covalents sont formés par la liaison de métalloïdes (éléments nonmétalliques : B, C, N...), ou de métalloïdes avec quelques métaux peu électropositifs (BN, AlN, SiC, SiO_2 , etc.). Les liaisons sont des liaisons covalentes très fortes. Ces cristaux ont une conductibilité électrique et ionique faible et une grande dureté. Sauf le graphite,

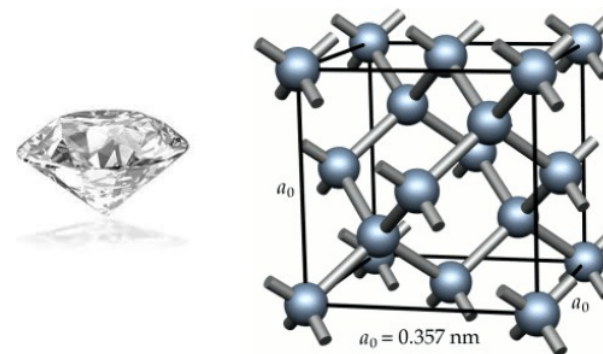


FIGURE 11 – Structure du diamant (cristal covalent).

qui est friable et conducteur électrique !

Cristaux ioniques Les cristaux ioniques sont formés par la réunion d'éléments d'électronégativités très différentes. Ils ont une bonne conductivité ionique à haute température, un clivage facile (rupture donnant des faces planes) et un spectre d'absorption IR caractéristique.

Exemple 7 :

Energie réticulaire Cristal linéaire 2N ions
 $\dots A^- B^+ A^- B^+ A^- B^+ \dots$

$$U = -N \frac{1,386e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Pour la rapporter à l'unité AB, il faut diviser par N, et on trouve $-1,386e^2/4\pi\epsilon_0 d$. Si on compare cette énergie à celle qu'on a pour un seul dipôle AB, $-1,386e^2/4\pi\epsilon_0 d$, on voit que l'énergie, par dipôle AB, du cristal unidimensionnel est plus basse que celle d'un dipôle AB. Le cristal linéaire est donc plus stable que le dipôle.

Cristal tridimensionnel - constante de Madelung.

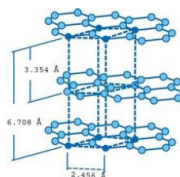
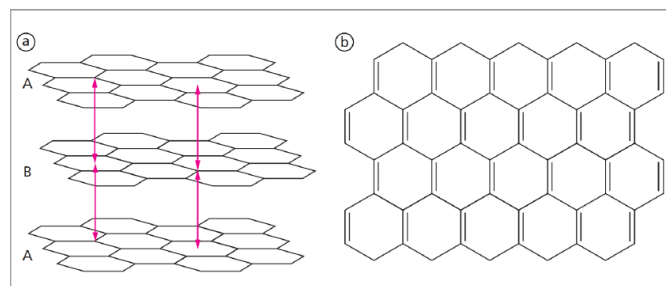


FIGURE 12 – Structure du graphite (cristal covalent dans une direction et moléculaire dans l'autre)

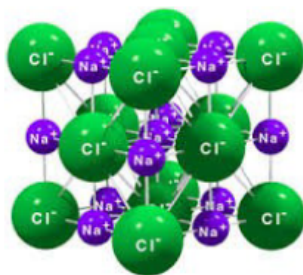


FIGURE 13 – Structure du chlorure de sodium (cristal ionique)

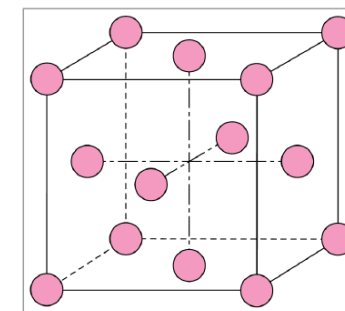


FIGURE 14 – Structure du cuivre (cristal métallique)

Cristaux métalliques Les cristaux métalliques sont les structures normales des éléments appelés métaux (atomes électropositifs) dans la classification périodique. Les alliages métalliques ont tous le même type de liaison, quoique certains d'entre eux aient tendance à avoir des liaisons en partie covalentes et dirigées. Ils ont une bonne conductibilité électrique et thermique. Les énergies de cohésion sont de l'ordre de -125 à -850 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Dans les métaux solides (et aussi liquides), les électrons de valence assurent les liaisons entre les atomes, au lieu d'être confinés spatialement dans des régions étroites entre atomes adjacents et sont complètement délocalisés : on parle d'électrons libres (ils sont tout de même confinés dans le cristal et n'en sortent pas dans les conditions habituelles).

3 - Propriétés mécaniques

Tout objet soumis à un effort se déforme, ce qui entraîne un déplacement des atomes hors de leur position d'équilibre. Apparaissent alors des forces de rappel qui s'opposent à la déformation et qui tendent à restaurer le solide dans sa forme originale lorsque l'on cesse de le solliciter. Différents essais de laboratoire permettent d'étudier les modes de déformation des matériaux (par exemple : traction, compression, torsion) d'un point de

vue macroscopique et phénoménologique, et de déterminer les contraintes nécessaires pour obtenir une déformation donnée. Quand on analyse la réponse mécanique du matériau, on distingue le domaine d'élasticité et le domaine de plasticité, la transition entre les deux domaines étant nommée limite d'élasticité. Si l'on effectue une déformation dans le domaine élastique, le comportement est réversible et le matériau recouvre sa forme initiale. A l'inverse, au-delà de la limite d'élasticité, la déformation plastique est irréversible.

a) Origine microscopique de l'élasticité

En général, en élasticité, la température est constante. La bonne variable thermodynamique (c-a-d celle que l'on va minimiser) est l'énergie libre F

$$F = U - TS$$

où U est l'énergie interne, S l'entropie et T la température. Le minimum d'énergie libre correspond à un minimum d'énergie interne ou à un maximum d'entropie. La force de rétraction élastique est donc constituée de deux contributions, d'une part une force de rétraction enthalpique, et d'autre part une force de rétraction entropique. Et l'énergie mécanique apportée au système peut être stockée sous forme d'augmentation de l'énergie interne en modifiant les distances interatomiques ou les angles de valence, ou sous forme de chaleur avec une diminution de l'entropie du système i.e. une augmentation de l'ordre.

Cette étude thermodynamique amène à considérer deux cas limites : le cristal idéal et l'élastomère. Dans le premier cas, la force de rétraction reste quasi-constante en fonction de la température et a donc une origine enthalpique. Pour ces solides à élasticité enthalpique (métaux, céramiques cristallines, polymères thermodurcissables très réticulés), la force de rétraction élastique résulte d'un petit déplacement des atomes hors de leur position d'équilibre. L'énergie de cohésion de ces solides est très élevée, le module d'élasticité est grand et le domaine élastique réversible très limité. La déformation induit une augmentation importante de l'énergie interne et l'entropie n'est pratiquement pas modifiée puisque les atomes

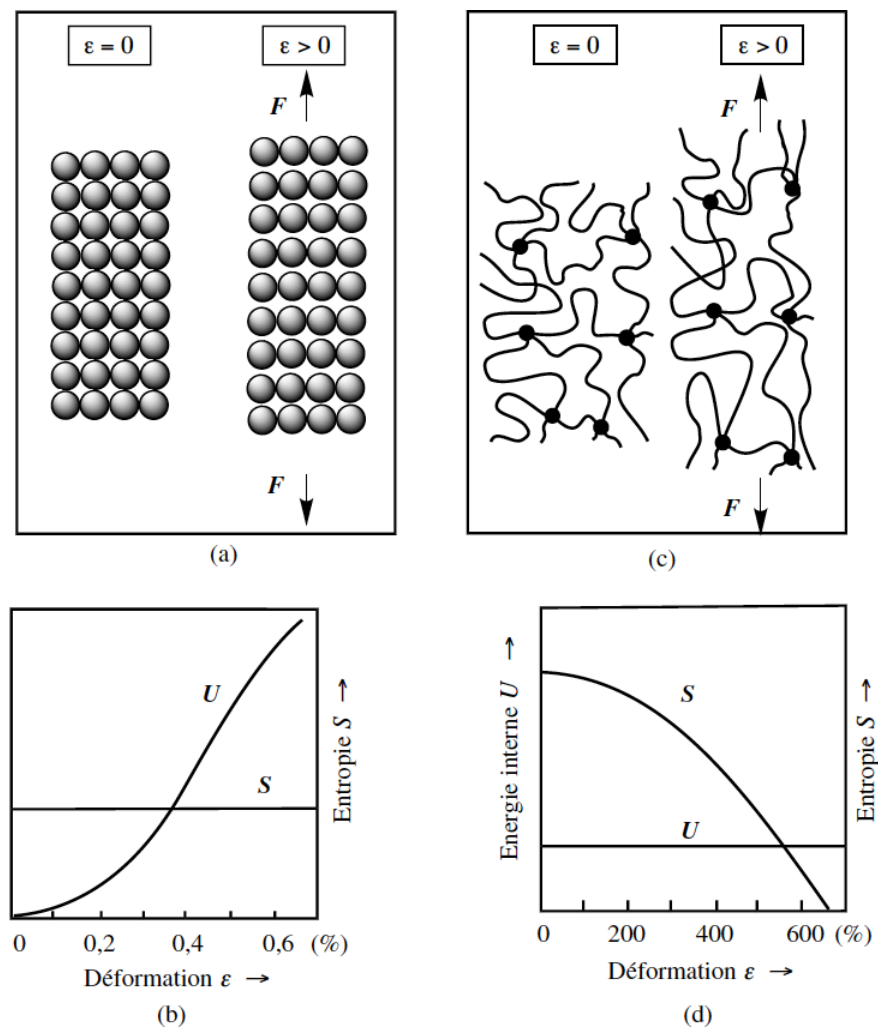


FIGURE 15 – Mécanismes intervenant à l'échelle atomique dans l'élasticité des solides en relation avec les variations de l'énergie interne U et de l'entropie S : (a) mécanisme de la déformation et (b) variation d'énergie interne dans les solides à élasticité enthalpique (métaux et céramiques) ; (c) mécanisme de déformation et (d) variation d'entropie dans les solides à élasticité entropique (élastomères). À noter la différence de l'échelle de déformation ϵ entre (b) et (d).

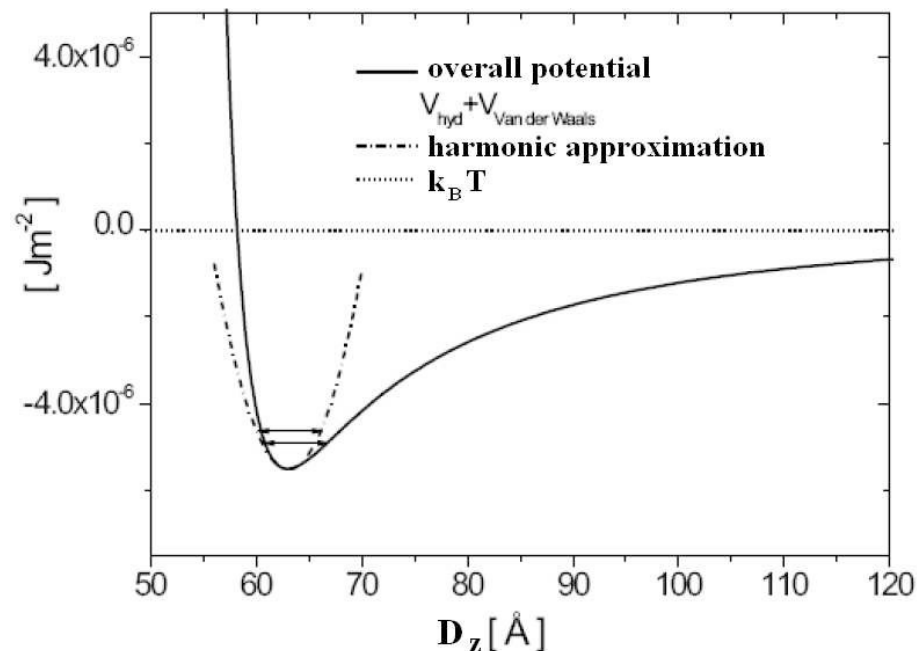


FIGURE 16 – Approximation du potentiel harmonique

s'écartent peu de leur position d'équilibre. Dans le cas des élastomères (les caoutchoucs), la force de rétraction varie significativement avec la température absolue. Ces solides à élasticité entropique sont en fait constitués de longues chaînes macromoléculaires reliées entre elles par des liaisons pontales peu nombreuses. La cohésion entre ces chaînes est donc très faible. Les forces de rétraction sont engendrées par des mouvements browniens et augmentent avec la température. Le module d'élasticité est donc typiquement très faible et la déformabilité est importante.

Energie interne et élasticité Energie d'interaction \rightarrow force
Potentiel harmonique \rightarrow force de rappel type élastique (origine électrostatique)

Matériaux différents : atomes différents donc énergie interaction différente \rightarrow pas la même résistance et comportement élastique différent (matériau plus dur ou plus mou). Exemple de l'acier trempé : atomes de fer en structure cubique centrée (fer α) \rightarrow chauffé à environ 800°C -

\rightarrow structure cubique face centrée (fer γ) qui possède des sites interstitiels plus grands : le carbone se dissout mieux dans le fer γ que dans le fer α \rightarrow refroidissement rapide (sinon le carbone précipite). L'acier trempé est plus dur que le fer. La dureté est proportionnelle à la teneur en carbone. Les défauts d'arrangement cristallin ont aussi un rôle. Si beaucoup de joints de grain \rightarrow matériau plus mou.

Origine entropique Dans le cas des polymères et des élastomères, l'élasticité ne vient pas d'un minimum d'énergie mais est un effet entropique.

Un polymère est constitué de longues chaînes carbonnées qui se comportent comme des fils flexibles. Un élastomère est un monomère réticulé, c'est à dire que les chaînes sont attachées entre elles par une liaison chimique.

Pour maximiser son entropie de configuration, une chaîne polymère tend à adopter une forme de pelote sphérique. Lorsqu'on applique une force mécanique extérieure, on tend à déformer la pelote. Il s'exerce alors une force de rappel qui tend à ramener la pelote vers la forme sphérique.

b) Déformation élastique des solides

Pour de faibles déplacements, la force de rappel peut être considérée comme proportionnelle au déplacement. Les allongements (ou raccourcissements) relatifs ou déformations ε du solide (sans dimension), sont alors proportionnels à la densité surfacique de force, ou contrainte σ ($\sigma = F/S$ est homogène à une pression).

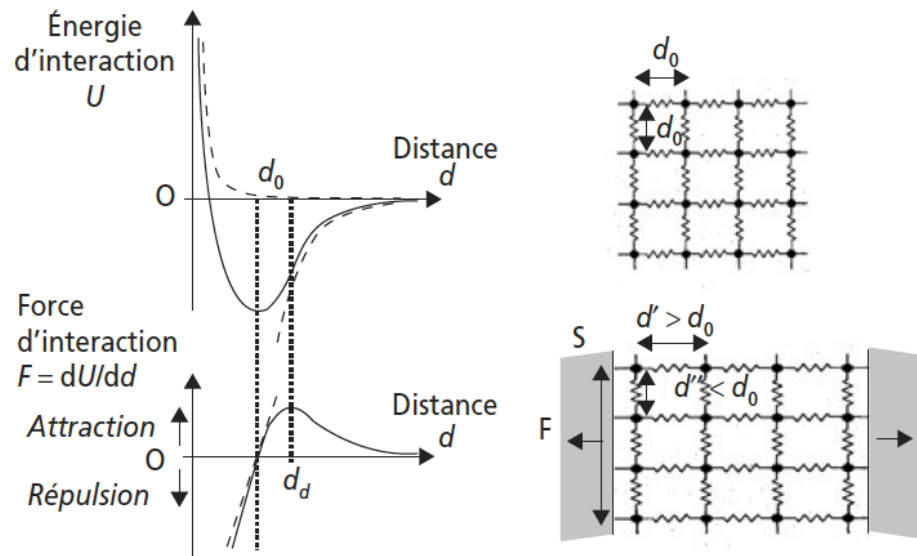


FIGURE 17 – Variations de l'énergie d'interaction et de la force d'interaction entre deux atomes en fonction de leur distance d . De part et d'autre de la distance d'équilibre d_0 , la force de rappel est approximativement proportionnelle à l'écart $d - d_0$.

acier	$E \simeq 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
verre	$E \simeq 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
béton	$E \simeq 10^{10} \text{ Pa}$
Plexiglas (PMMA)	$E \simeq 3 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
bois, nylon	$E \simeq 10^9 \text{ Pa}$
caoutchouc	$E \simeq 2 - 20 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
peau	$E \simeq 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
gélatine	$E \simeq 1 - 10 \cdot 10^3 \text{ Pa}$

◆ Définition :

Déformation élastique sous l'effet d'une contrainte σ

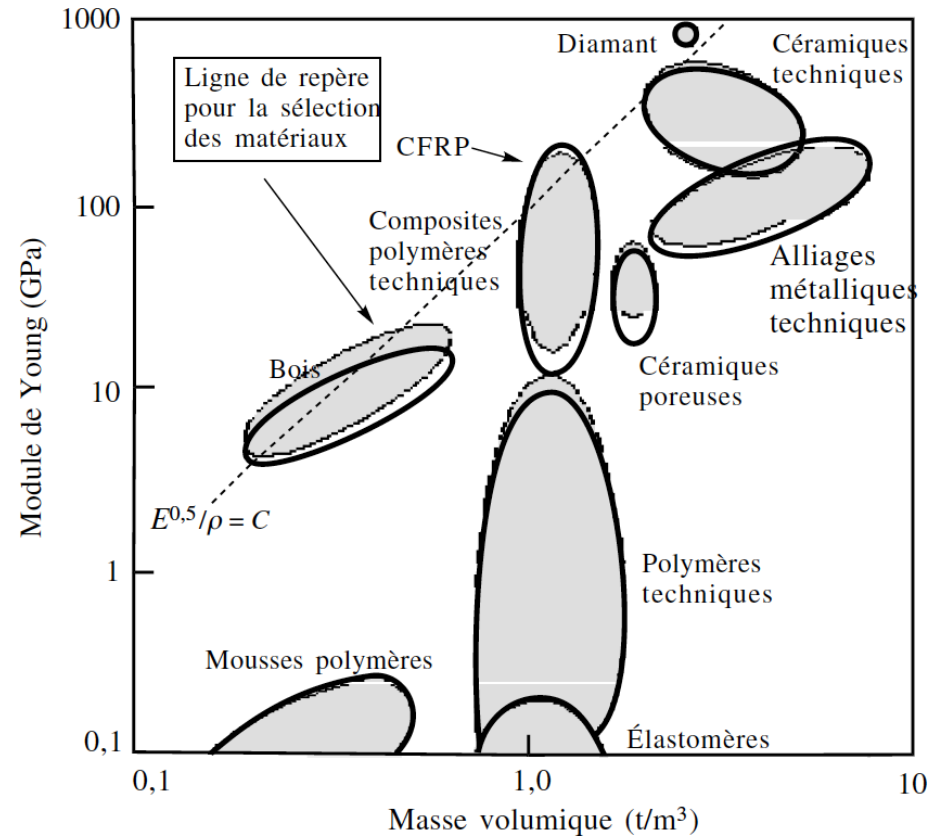
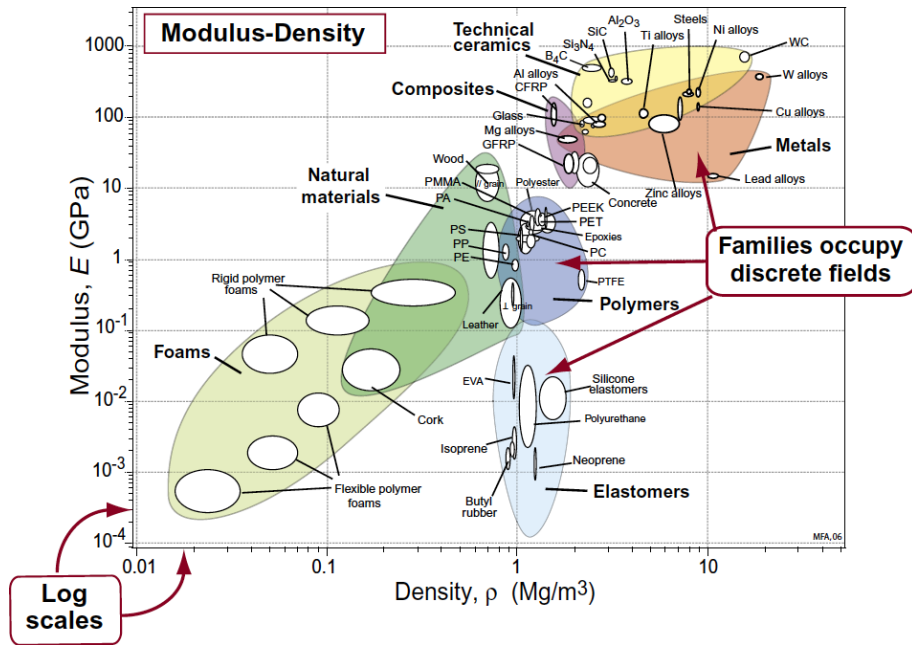
$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{R - R_0}{R_0} = E \varepsilon$$

Les contraintes s'expriment en Pa et les déformations étant sans dimensions, le coefficient E , appelé module d'élasticité à la traction ou module de Young du matériau, s'exprime en Pa.

Simultanément à la déformation dans la direction d'application de la force, des déformations de signe opposé se produisent dans les directions orthogonales (Fig. 18).

Ordre de grandeur

Dimensionnement pour le modèle cristallin : $E \sim U/r_0^3$ selon liaison $U \sim 10^{-22} - 10^{-19} \text{ J}$ et $r_0 \sim 10^{-10} \text{ m} \rightarrow E \sim 10^8 - 10^{11} \text{ Pa}$



Exemple 8 :

Application : allongement d'un fil de $l_0 = 1$ m et de section $S = 1$ mm accroché au plafond au bout duquel on suspend une masse $m = 1$ kg. Contrainte $\sigma = mg/S \sim 1 \cdot 10^7$ Pa. Allongement $\Delta l = \varepsilon l_0 = \sigma l_0 / E$.

Fil de nylon $\Delta l = 1$ cm. Fil decaoutchouc $\Delta l = 5$ m (sorti domaine élasticité - non valable). Fil d'acier $\Delta l = 50 \mu m$

Si une construction se réduisait à des colonnes formées de blocs superposés, soumis simplement à la compression des éléments situés au-dessus d'eux, on pourrait atteindre des hauteurs considérables avec la plupart des matériaux. Un bloc de pierre rompt par exemple sous une compression de l'ordre de 500 kg/cm^2 . La densité de la pierre étant de $2,5$, ce bloc devrait pouvoir supporter une hauteur de pierre de près de $2\,000$ mètres! On trouverait des hauteurs du même ordre pour l'acier (plus dense, mais plus

FIGURE 18 – Carte de sélection des matériaux pour une aile d'avion. Pour obtenir des performances maximum en aviation, il faut que la structure portante soit la plus rigide et la plus légère possible. On montre que pour une rigidité en flexion déterminée, la masse de la structure est d'autant plus légère que le rapport \sqrt{E}/ρ est grand.- démonstration Dupeux p353

résistant). Il n'est donc pas surprenant que la construction d'un gratte-ciel d'un kilomètre de haut ait pu être envisagée.



FIGURE 19 – Pont de Tancarville.

Les premiers ponts suspendus, construits au XIX^e siècle, se sont parfois écroulés par défaut de résistance de l'acier des chaînes de suspension (les câbles n'ayant été utilisés que plus tard). En effet, les forces de traction s'exerçant sur les câbles du fait du poids du tablier sont très importantes. Celles qui s'appliquent sur l'ensemble des câbles du pont de Tancarville, le plus grand pont suspendu français, sont de 16 000 tonnes. Les deux câbles initiaux de ce pont étaient constitués d'environ 20 000 fils d'acier torsadés de 4,7 mm de diamètre, représentant, au total, une section d'acier de 3 500 cm². La contrainte de traction subie par ces fils est donc 4 500 kg/cm², ce qui est proche de la limite élastique de l'acier ordinaire. On les a donc remplacés, en 1995, par quatre câbles.

Contrainte transverse Lorsqu'on étire un matériau dans une direction, il se contracte dans le plan perpendiculaire à l'étirement. Les déformations élastiques peuvent toutes s'exprimer en fonction de la contrainte

caoutchouc	$\nu \simeq 0,5$
aluminium	$\nu \simeq 0,33$
sable	$\nu \simeq 0,2 - 0,45$
liège	$\nu \simeq 0$

σ_x appliquée dans la direction x

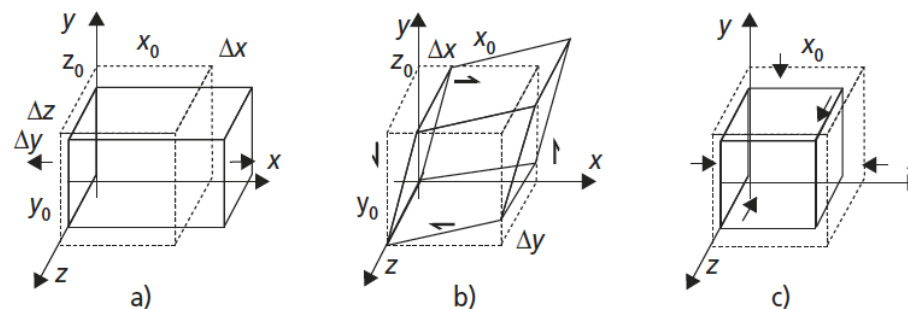


FIGURE 20 – Schéma des déformations élastiques provoquées par différentes sollicitations. a) Contrainte de traction uniaxiale σ_x . b) Contrainte de cisailage τ_{xy} dans le plan xy . c) Pression hydrostatique p .

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta z}{z} = -\nu \frac{\Delta x}{x} = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

ν : coefficient de Poisson. On montre que $-1 \leq \nu \leq 1/2$. Le module de Young E et le coefficient de Poisson ν sont caractéristiques du matériau. L'élasticité d'un solide isotrope est entièrement caractérisé par E, ν .

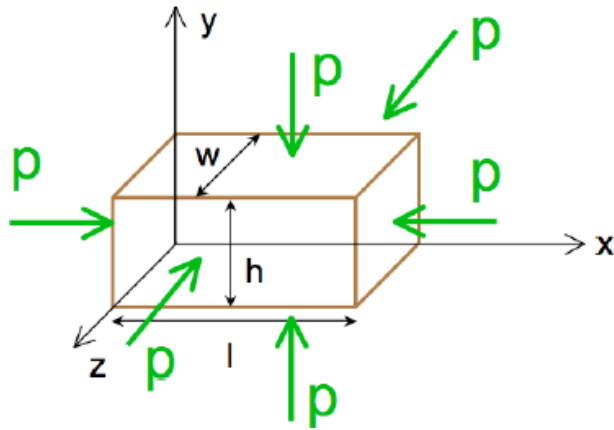
Ordre de grandeur

Contrainte uniforme

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = -\frac{p}{E} \text{ (contrainte selon } x)$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{\Delta l_z}{l_z} = \nu \frac{p}{E} \text{ (contrainte orthogonales } x)$$

$$\frac{\Delta x}{x} = -(1 - 2\nu) \frac{p}{E} \text{ (bilan)}$$

FIGURE 21 – Contrainte uniforme. Ici, une surpression p .

Idem pour $\Delta y, \Delta z$. Variation de volume $\Delta V/V = -3(1 - 2\nu)p/E$.
 $p = -K\Delta V/V$ avec $K = E/3(1 - 2\nu)$ module de compressibilité uniforme.
 $K \geq 0$ impose $\nu \leq 1/2$ ($\nu = 1/2$ correspond à un fluide incompressible $\Delta V = 0 \forall p$).

Contrainte de cisaillement

$$\sigma_{\text{cisail}} = G \frac{\Delta x}{h}$$

G module de cisaillement $G = E/2(1 + \nu)$. $G \geq 0$ impose $\nu \geq -1$.

résilience - aspect énergétique Callister p 233

Exemple 9 :

| Résistance théorique et énergie de rupture - Wilfried p 155...

Flexion d'une poutre - Meister p 22-24

Matériau à mémoire de forme et matériaux superélastiques La plupart des matériaux se dilatent lorsqu'ils sont chauffés et se contractent

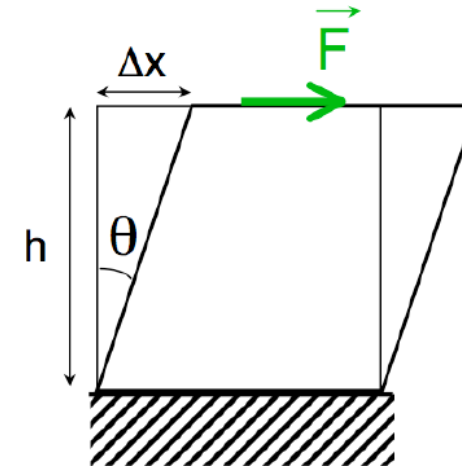


FIGURE 22 – Contrainte de cisaillement. Force dans le plan de la force considérée

lorsqu'ils sont refroidis. Certains matériaux ont une réponse différente à cause d'un changement de phase à l'état solide. Une simple variation de température, de courant électrique, ou encore de contrainte mécanique, et l'on repart sur la disposition d'origine, les atomes reprenant leurs places « attribuées » au moment de la fabrication. Une fabrication qui se déroule à haute température, comme c'est toujours le cas en métallurgie. Les métaux ne sont pas les seuls à bénéficier de cette capacité de mémorisation des formes. Des résultats prometteurs ont été obtenus sur des plastiques, des céramiques ou encore des polymères mais ce sont les alliages en métal qui apportent les résultats les plus probants. Ils possèdent une multitude de propriétés différentes, dont principalement : - L'effet « mémoire simple sens » où le matériau, dans lequel on façonne une agrafe médicale par exemple, est capable de retrouver par un signal électrique ou par chauffage, sa forme initiale. - L'effet « mémoire double sens » : l'alliage est capable après "éducation" d'avoir deux positions stables, l'une au dessus d'une température dite critique et l'autre en dessous ; - La « superélasticité » : l'alliage peut se déformer énormément, jusqu'à 10%, de manière réversible sous l'effet d'une contrainte, comme avec les montures de lunettes souples et incassables. - L'effet « amortissant » enfin : l'alliage est

capable d'amortir des chocs ou d'atténuer des vibrations mécaniques (système parasismique).

Les matériaux à mémoire de forme sont souvent des alliages métalliques (nickel, titane, mais aussi cuivre, aluminium, ou zinc) qui peuvent exister sous deux configurations cristallines différentes appelées *allotropes*. La déformation du matériau s'accompagne d'un changement progressif d'une structure à l'autre, ce qui permet d'atteindre des déformations très élevées. Un alliage à mémoire de forme possède une température critique au-dessous de laquelle le matériau déformé conserve simplement sa nouvelle forme. Lorsqu'il est chauffé au-dessus de sa température critique, il retrouve la structure allotropique de l'allotrope original et reprend sa forme initiale. Si la température ambiante est déjà supérieure à la température critique, le matériau reprend sa forme initiale dès qu'il est relâché, comme si l'état était élastique, à la différence que ce changement de phase permet d'atteindre de plus grandes déformations, par un facteur 100 voire plus, que l'élasticité directe sans changement de phase. Ces matériaux sont qualifiés de superélastiques (applications : montures de lunettes, ressorts, ...).

À chacune de ces propriétés correspond une recette de fabrication bien précise. Ainsi, pour obtenir un alliage nickel - titane, avec une déformation « simple sens » d'une variation de 4%, on préférera un mélange à 49% de nickel, 51% de titane, avec une cuisson à 400°C pendant une à cinq heures. Pour une variation de 8% seulement, on inverse quasiment les proportions à 50,5% de nickel et 49,5% de titane.

Les alliages à mémoire de forme ont aussi des applications dans le génie civil : ils concurrencent par exemple les systèmes parasismiques classiques à base de vérin ou de caoutchouc. Ils réagissent tout simplement en dissipant une grande partie de leur énergie lors de leur changement de forme. Ce qui permet d'absorber les secousses d'un tremblement de terre, et de limiter les à-coups qui ruineraient les édifices. Une partie de la basilique St François d'Assise, en Italie, repose maintenant sur un système faisant appel à ces matériaux qui a été installé lors de la restauration de l'édifice, gravement endommagé lors du séisme de 1997.

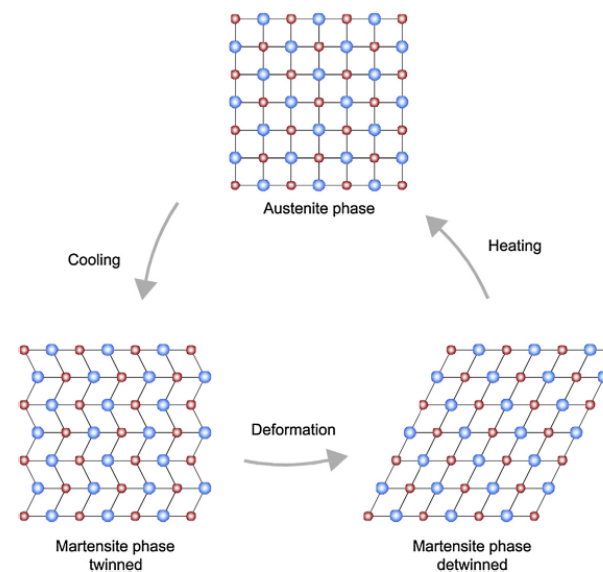


FIGURE 23 – Changement de phase allotropique dans un matériau à mémoire de forme [par exemple nitinol - alliage (Ni, Ti) ou Fe].

c) Introduction à la description tensorielle

On a pu noter que la contrainte est liée à la direction de la force par rapport à la normale à la face sur laquelle elle s'applique. La déformation peut être élongationnelle ou angulaire. Il est en fait nécessaire de décrire le problème sous forme tensorielle.

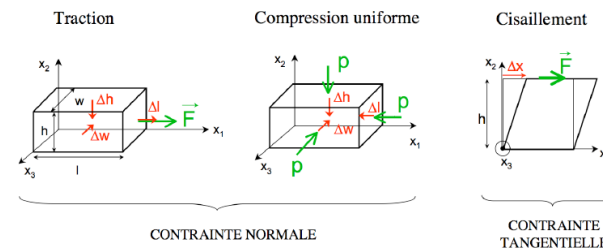


FIGURE 24 – Résumé : déformations sous contraintes normales et tangentielles.

Définition :
Tenseur de contraintes

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

composante σ_{ik} où i indique la direction du vecteur force et k indique la direction normale à la face sur laquelle la force est appliquée.

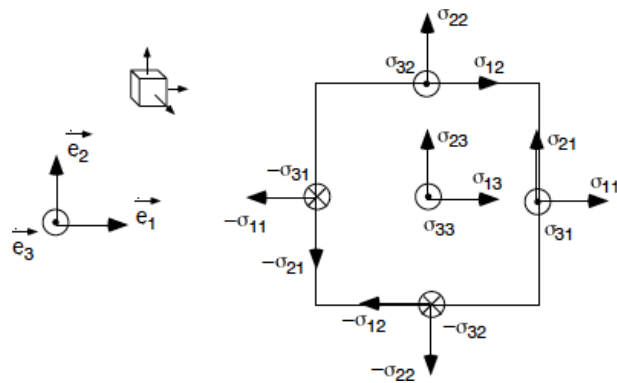


FIGURE 25 – Forces de surface et tenseur de contrainte.

Par exemple

- traction : $\sigma_{11} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles
- compression uniforme : $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles
- cisaillement : $\sigma_{12} \neq 0$

On voit donc qu'à une contrainte normale correspondent les composantes diagonales du tenseur des contraintes, et qu'à une contrainte tangentielle

correspond une composante hors diagonale. Le tenseur des contraintes, avec toutes ses composantes, contient donc la combinaison de contraintes normales et tangentielles. La donnée du tenseur des contraintes permet de traiter le cas général sans avoir à rechercher la nature particulière de telle ou telle perturbation.

Définition :

Pour décrire une déformation élastique 3D, on définit aussi le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ (9 composantes) et le tenseur d'élasticité $\bar{\mathcal{E}}$ (ordre 4, donc $3^4 = 81$ coefficients, mais les symétries permettent de simplifier).

Loi de Hooke en 3D

$$\sigma_{ik} = \sum_{j,k} \mathcal{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Ondes élastiques dans les solides On considère une onde élastique plane se propageant selon Ox . L'équation de propagation prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\mu(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{2\mu(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{2\mu(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0, c_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\mu(1+\nu)(1-2\nu)}} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0, c_T = \sqrt{\frac{E}{2\mu(1+\nu)}} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations décrivent un ébranlement qui se propage selon la direction Ox , à la vitesse c_L ou c_T . c_L est associée à un ébralement parallèle à la direction de propagation : il s'agit d'une onde longitudinale (ou onde de compression). c_T est associée à un ébralement perpendiculaire à la direction de propagation : il s'agit d'une onde transversale (ou onde de cisaillement). Une onde élastique consiste donc en deux ondes qui se propagent de façon indépendantes. La vitesse de propagation c_L est toujours plus grande que c_T ($c_T/c_L \leq 3/4$ car $-1 \leq \nu \leq -1/2$). Ainsi, les premières secousses enregistrées par un sismographe seront toujours les ondes longitudinales : on les appelle ondes p (du latin primae). Les ondes transverses parviennent avec un léger décalage, on les appelle onde s (de secundae).

d) Déformation plastique des solides

La déformation plastique est grandement facilitée par la présence de dislocations. En effet, en leur absence, il faudrait appliquer des contraintes de cisaillement très élevées pour déplacer une partie du cristal par rapport à l'autre, car il serait nécessaire de rompre simultanément toutes les liaisons adjacentes au plan de glissement. Ce processus demanderait des contraintes de l'ordre du dixième du module de cisaillement. La déformation plastique des cristaux métalliques s'opère sous l'action de contraintes beaucoup plus faibles que $E/10$ en raison du déplacement aisé des dislocations présentes dans ce type de matériau. C'est le déplacement des dislocations (glissement), qui est à la base de la déformation plastique des métaux et de leurs alliages. Ce glissement, toujours perpendiculaire à la ligne de dislocation, est facilité par le caractère très localisé de ces défauts. Lors du passage d'une dislocation dans un cristal, il y a peu d'atomes impliqués et peu de liaisons rompues simultanément. Grâce à une grande densité de dislocations et à leur facilité de déplacement, une déformation macroscopique importante peut être obtenue en peu de temps dans les matériaux métalliques (tôles par exemple) par des procédés de formage à basse température. Les autres types de matériaux (céramiques, polymères organiques réticulés et les thermoplastiques à une phase aux températures inférieures à la transition vitreuse) qui ont peu ou pas de dislocations, ont, en règle générale, un comportement fragile. Il faut utiliser des procédés de

thermoformage pour les mettre en oeuvre (cas des poudres céramiques et des matériaux thermoplastiques).

TD : PolyPteSolide.pdf p126 + Wilfried p 169

III. Propriétés électriques

1 - Diagramme de bande

. Les éléments du groupe VIII, appelés gaz rares, sont caractérisés par une couche externe complète ; ceci leur confère une stabilité chimique exceptionnelle. Les éléments du groupe I A (tableau 31) ne possèdent qu'un seul électron sur leurs couches externes : ils ont tendance à s'en défaire pour avoir une couche extérieure saturée et donner des ions positifs ou cations. Cette tendance s'étend aussi à tous les éléments de la partie gauche du tableau, appelés métaux, qui sont tous donneurs d'électrons. Les éléments du groupe VII A possèdent sept électrons sur leurs couches externes : ils ont tendance à la compléter en captant un électron disponible dans leur voisinage pour donner des ions négatifs ou anions. Cette tendance s'étend aussi à certains éléments de la partie droite du tableau, appelés non-métaux, tous accepteurs d'électrons. Certains éléments situés à la limite entre ces deux zones présentent des caractères mixtes, variables selon le champ électrique auquel ils sont soumis (ils sont semi-conducteurs). La figure 34 illustre ces différences de comportement par les structures de bandes de ces divers types d'atomes. Les conducteurs ont une bande supérieure partiellement remplie. Sous l'effet d'un champ électrique, les électrons peuvent acquérir de l'énergie (cinétique) en utilisant les niveaux d'énergies disponibles et donc se déplacer librement dans le matériau. Les isolants, ont la dernière bande d'énergie totalement remplie et les prochains niveaux d'énergies libres sont séparés par une bande interdite. Les semi-conducteurs présentent aussi une bande d'énergie interdite mais plus étroite de sorte que quelques électrons peuvent devenir mobiles si la température est suffisamment élevée ou si il y a des défauts dans le cristal. En ajoutant délibérément des éléments dopants, on crée des niveaux d'énergie dans la bande interdite, réduisant ainsi la barrière d'énergie et permettant ainsi à plus d'électrons de sauter dans des états inoccupés, ce qui augmente le nombre de porteurs mobiles.

La résistivité électrique ρ ($\Omega \cdot m$) d'un matériau traduit la mobilité des

MATERIAUX	résistivité à 20 °C
METAUX ET ALLIAGES	
cuivre	$1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$
aluminium	$2,65 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$
acier inoxydable	$7 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$
SEMI-CONDUCTEURS	
silicium	$2,5 \cdot 10^3 \Omega \cdot m$
CERAMIQUE ET MINERAUX	
alumine	$> 10^{13} \Omega \cdot m$
SiC	$1 \text{ à } 1 \cdot 10^9 \Omega \cdot m$
graphite	$1 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot m$
POLYMERES	
nylon	$10^{12} \Omega \cdot m$
polystyrène	$> 10^{14} \Omega \cdot m$
COMPOSITES	
béton (sec)	$10^9 \Omega \cdot m$
bois	$10^{14} - 10^{16} \Omega \cdot m$

électrons de conduction créant une densité de courant J (ampères/ m^2) dans un champ électrique E (volt/m) : $E = \rho J$. (résistance $R = \rho l/S$)

TD - Modèle de Drude-Lorentz - Wilfried p 397 (métal, semi-conducteur, nbre de porteur) + Callister p550+ mesure par effet Hall Callister p 555

Ordre de grandeur Les métaux présentent une faible résistivité (haute conductivité). Le cuivre et l'argent ayant la résistivité la plus faible. L'aluminium juste au-dessus. Les alliages les plus solides ont une résistivité électrique 10 à 100 fois plus élevée. Les céramiques, telles l'alumine et la silice, ont une très grande résistivité électrique et sont mécaniquement résistantes ; elles sont utilisées pour l'isolation électriques de lignes hautes tension ou comme substrats de circuits électroniques. Les polymères sont moins résistants mais flexibles et facilement moulables et sont d'excellents isolants aussi ; ils sont utilisées comme gaines de cables électriques, boîtiers de prises, etc. Un radôme (de radar et dôme) est un abri protecteur imperméable utilisé pour protéger une antenne des intempéries mais aussi

des regards, sa forme permettant de ne pas divulguer l'orientation de l'antenne (dans le cadre d'écoutes, d'interceptions de communications)¹. Divers matériaux peuvent être utilisés pour la construction mais ils ont en commun d'atténuer au minimum le signal électromagnétique émis et reçu.

2 - Couplage électro-mécanique : matériaux piézo él

Dans les matériaux piézoélectriques, comme le quartz, les déformations élastiques de la maille cristalline sous contrainte qui provoquent la polarisation électrique par décalage des barycentres des charges positives et négatives. Inversement, l'application d'un champ électrique provoque une polarisation induite qui s'accompagne d'une déformation élastique du cristal. Ces particularités permettent d'utiliser les cristaux piézoélectriques soit comme capteurs électriques de pression, soit comme actionneurs électromécaniques. On peut, en particulier, en faire des émetteurs ou des récepteurs d'ondes ultrasonores entre 0,5 MHz et 5 GHz

Propriétés piézo-électriques des solides Exemple : génération d'énergie dans les infrastructures et bâtiments.

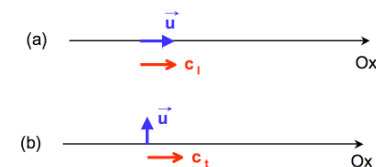


FIGURE 26 – (a) Onde longitudinale. (b) Onde transverse.

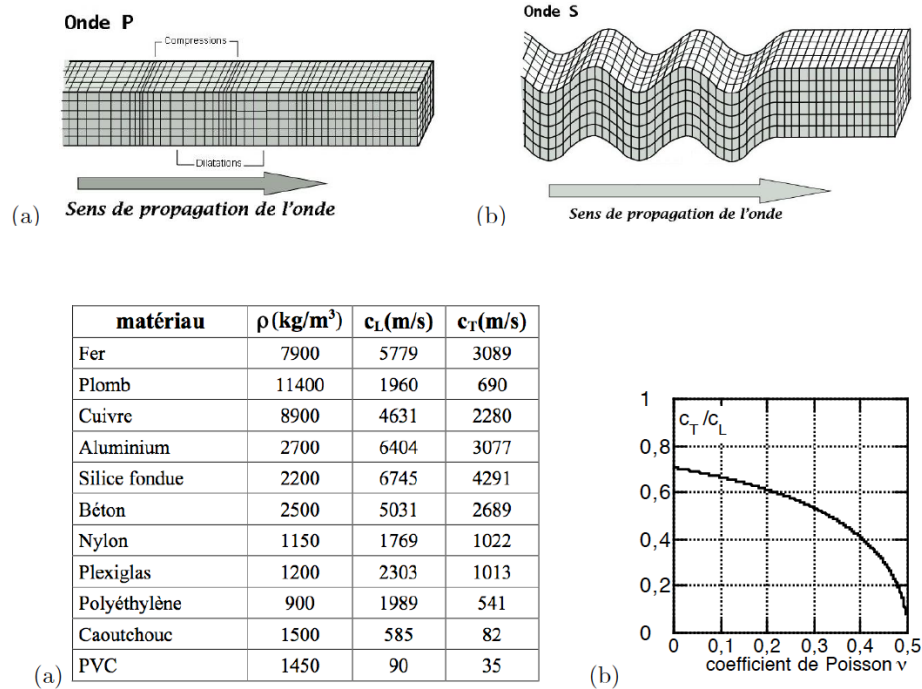


FIGURE 27 – (a) Valeurs des masses volumiques et de vitesses d'ondes élastiques longitudinales et transverses dans des matériaux courants. (b) Rapport entre la célérité des ondes transverse et celle des ondes longitudinales en fonction du coefficient de Poisson ν .

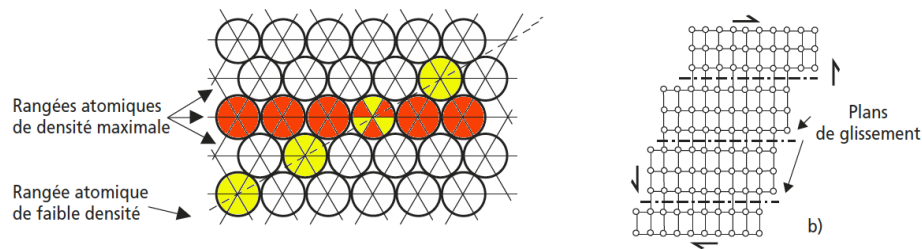


FIGURE 28 – Changement de phase allotropique dans un matériau à mémoire de forme [par exemple nitinol - alliage (Ni, Ti) ou Fe].

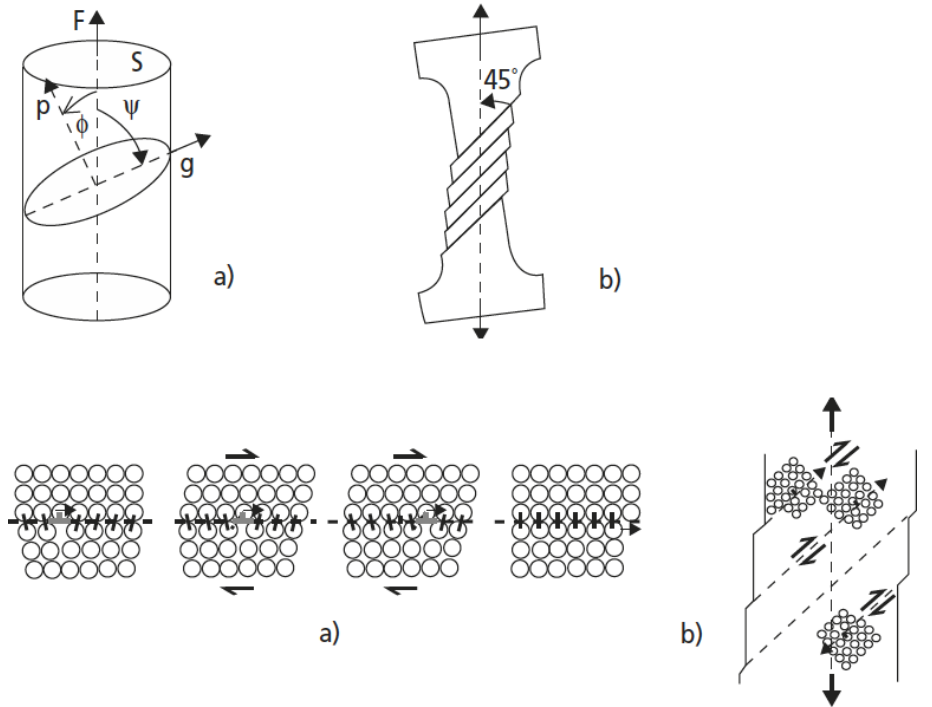


FIGURE 29 – Glissements des plans atomiques denses dans un monocristal en traction. Haut : a) Géométrie des systèmes de glissement (plan dense de normale p + direction dense g du plan). b) Cinématique des glissements primaires. Bas : Mécanisme de glissement d'une dislocation coin dans un cristal cubique simple.

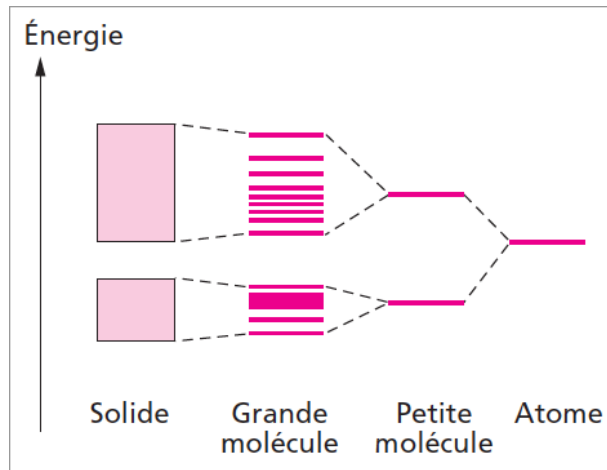


FIGURE 32 – La structure de bandes dans les cristaux.

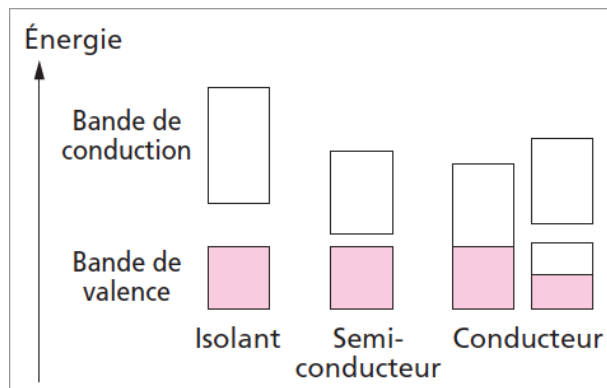


FIGURE 33 – Diverses structures de bandes.

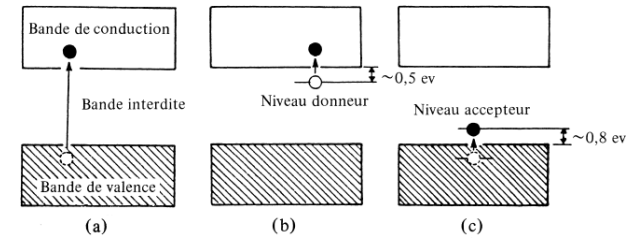


FIGURE 34 – Niveaux énergétiques approximatifs : (a) d'un semiconducteur intrinsèque (Si-bande interdite : 1,1 eV) ; (b) extrinsèque de type n ; (c) de type p.

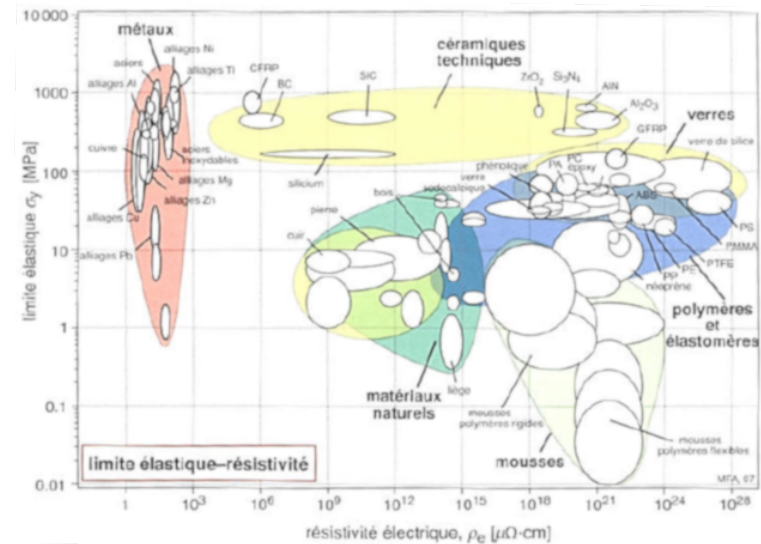


FIGURE 35 – Carte de la résistivité électrique des matériaux et de la limite élastique.



FIGURE 36 – a) Installation d'un radôme pour une antenne de réception satellite. b) Radôme en forme de cône qui une fois soulevé montre le radar d'un Airbus A320.