TD n°2 nddl

Exercice 1 On modélise l'arche de la défense à Paris par un système de 2 masses m reliées par 3 ressorts identiques k. On néglige tout amortissement.

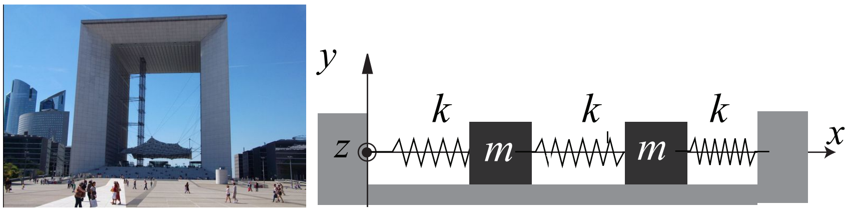

Figure 1 – Modélisation

On note x_1 le mouvement de la masse m_1 par rapport à sa position d'équilibre et x_2 celle de la masse m_2 par rapport à sa position d'équilibre.

1 - Déterminer les équations vérifiées par x_1 et x_2. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

2 - Écrire le système d'équation sous forme matricielle lorsque celui ci est soumis à un forçage de la première pile.

3 - On cherche une solution sous forme complexe : $\underline{x}_1 = \mathrm{X}_1 e^{i\omega t}$ et $\underline{x}_2 = \mathrm{X}_2 e^{i\omega t}$. Déterminer les pulsations propres du système.

4 - Pour la pulsation ω_0 et $\sqrt{3}\omega_0$, représenter le mouvement associé de l'arche.

Exercice 2

Des systèmes para-sismiques appelés absorbeur dynamique permettent de diminuer l'amplitude du mouvement d'un bâtiment soumis à un déplacement du sol en ajoutant une masse libre oscillante à la construction comme illustré ci-dessous pour la tour Taipei 101.

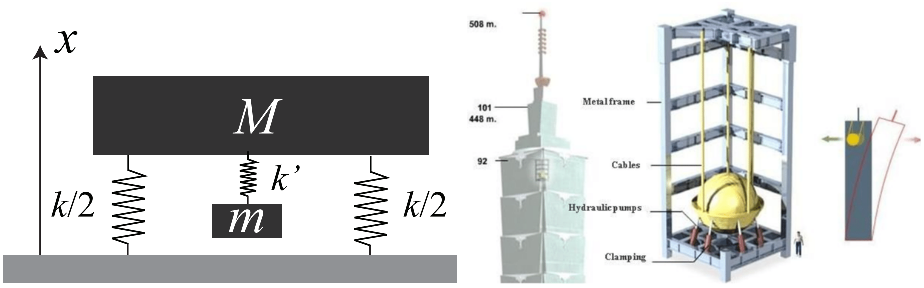

Figure 2 – Absorbeur dynamique

On notera x_1 le mouvement de la masse M par rapport à sa position d'équilibre et x_2 celle de la masse m par rapport à sa position d'équilibre. On supposera que $\alpha = m/\mathrm{M} = 10^{-3}$.

1 - Déterminer les équations vérifiées par x_1 et x_2. On pose $\Omega = \sqrt{k/\mathrm{M}}$ et $\omega_0 = \sqrt{k'/m}$.

2 - À quelle fréquence d'oscillation le bâtiment risque-t'il des dommages ?

3 - Pour une pulsation propre du bâtiment Ω égal à la pulsation propre de l'absorbeur ω. Que vaut la constante de raideur k'.

4 - Dans le cas $\Omega = \omega_0$, écrire le système d'équation sous forme matricielle lorsque celui ci est soumis à un forçage de la base à une pulsation ω.

5 - En déduire les pulsations propres du système à 2 ddl. Justifier l'intérêt d'un tel système ?

6 - Que faut il rajouter au système étudié pour éviter des amplitudes de mouvement trop élevé. Effectuer un schéma de votre proposition.

Solution 1 *1 -*

$$\begin{cases} \mathrm{M}\ddot{x}_1 = -k/2x_1 - k/2x_1 - k'(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = k'(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 - \alpha\omega^2 x_2 = 0 \\ \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

2 - Le bâtiment subit des dommages à sa pulsation propre : Ω.
3 - Avec $\omega_0 = \Omega$, *il vient :*

$$k' = k\sqrt{\alpha}$$

4 - Dans ce cas, il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 - \alpha\Omega^2 x_2 = 0 \\ \\ \ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 - \Omega^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Posons

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & -\alpha\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \Omega^2 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système précédente s'écrit alors :

$$\ddot{\mathrm{X}} + \mathrm{DX} = \mathrm{F}$$

5 - La solution à la pulsation ω *(système linéaire) vérifie :*

$$(-\omega^2\mathrm{I} + \mathrm{D})\mathrm{X} = \mathrm{F}$$

Le système est inversible si le déterminant est nul

$$det \begin{pmatrix} \Omega^2 - \omega^2 & -\alpha\Omega^2 \\ \Omega^2 & \Omega^2 - \omega^2 = 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega^2 - \omega^2)^2 - \alpha\Omega^4 = 0$$

soit :

$$\omega = \Omega\sqrt{1+\alpha}$$

On évite la résonance à Ω *6 - Un dispositif d'amortissement permet de diminuer les oscillations à la résonance.*

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ On modélise un pont à 2 piles par 2 masses m reliées par 3 ressorts identiques k. On suppose la présence d'amortissement dans la partie centrale du pont, on notera α le coefficient de frottement fluide.

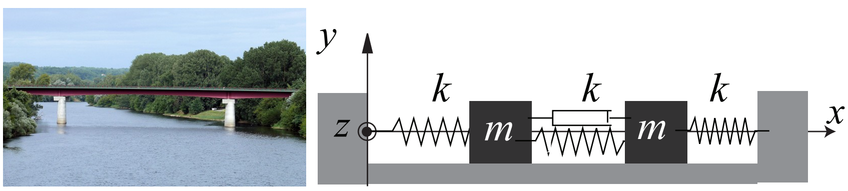

FIGURE 3 – Modélisation

On note x_1 le mouvement de la masse m_1 par rapport à sa position d'équilibre et x_2 celle de la masse m_2 par rapport à sa position d'équilibre.
1 - Déterminer les équations vérifiées par x_1 et x_2. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\xi\omega_0 = \alpha/m$.
2 - Écrire le système d'équation sous forme matricielle lorsque celui ci est soumis à un forçage de la première pile.

3 - On cherche une solution sous forme complexe : $\underline{x}_1 = \mathrm{X}_1 e^{i\omega t}$ et $\underline{x}_2 = \mathrm{X}_2 e^{i\omega t}$. Montrer qu'il existe une solution si

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{(3 - 4\xi^2)} - 2i\xi\omega_0$$

4 - Quelle est l'interprétation physique d'une pulsation complexe ?
5 - Représenter l'allure de l'amplitude des oscillations.

Solution 2 *1 - On obtient :*

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) + \alpha(\dot{x}_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) - \alpha(\dot{x}_2 - x_1) \end{cases}$$

avec les notations :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\xi\omega_0\dot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 - 2\xi\omega_0\dot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\xi\omega_0\dot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 - 2\xi\omega_0\dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

2 - Le système s'écrit sous forme matricielle :
Posons

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}, \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 2\xi\omega_0 & -2\xi\omega_0 \\ -2\xi\omega_0 & 2\xi\omega_0 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système précédente s'écrit alors :

$$\ddot{\mathrm{X}} + \mathrm{E}\dot{\mathrm{X}} + \mathrm{D}\mathrm{X} = \mathrm{F}$$

Le système possède une solution non triviale si la matrice suivante est inversible :

$$\mathrm{M} = -\omega^2 \mathrm{I} + i\omega\mathrm{E} + \mathrm{D}$$

$$det\mathrm{M} = (-\omega^2 + 2\omega_0^2 + 2i\xi\omega\omega_0)^2 - (\omega_0^2 + 2i\xi\omega\omega_0)^2 = 0$$

4 - Pulsation complexe = amortissement exponentielle
5 -

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Une maison à 1 étage peut être modélisée par une succession de 2 masses m et M correspondant au plancher du premier étage et à la charpente accrochées à des ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

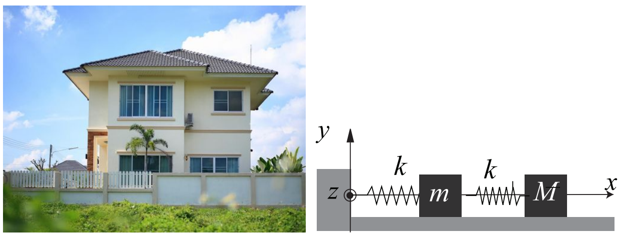

Figure 4 – Modélisation

1 - Écrire les équations du mouvement en notant x_1 et x_2 les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre.
2 - Écrire le système d'équation obtenu sous forme matricielle. On posera $\omega_0^2 = k/\mathrm{M}$ et $\alpha = m/\mathrm{M}$.
3 - Déterminer les pulsations propres du système et conclure sur la valeur de α.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Le bâtiment de 5 étages ci-dessous est modélisé par une assocation de 5 masses identiques associées à 5 ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

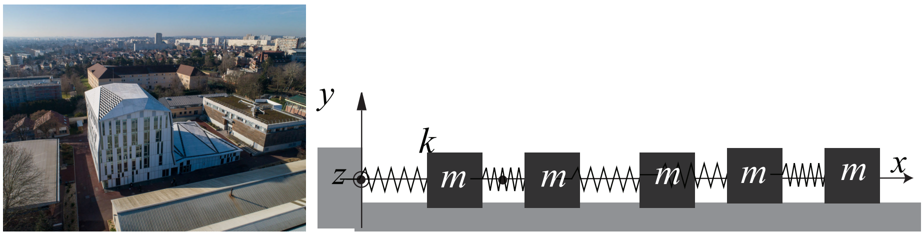

FIGURE 5 – Modélisation

1 - Écrire les équations du mouvement en notant $x_{i=1,..,5}$ les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre.

2 - Définir la matrice des masses M, la matrice de raideur K pour ce système.

3 - Une résolution numérique permet de déterminer les valeurs propres réduites $x = \omega/\omega_0$:

$$0.29, 0.84, 1.32, 1.68, 1.92$$

4 - Dans le cas d'un forçage sinusoïdale par la base, représenter l'allure du mouvement d'une masse.