

TD n°2 nddl

Exercice 1 On modélise l'arche de la défense à Paris par un système de 2 masses m reliées par 3 ressorts identiques k . On néglige tout amortissement.

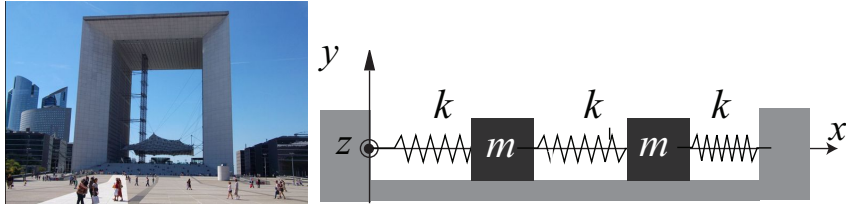


FIGURE 1 – Modélisation

On note x_1 le mouvement de la masse m_1 par rapport à sa position d'équilibre et x_2 celle de la masse m_2 par rapport à sa position d'équilibre.

- 1 - Déterminer les équations vérifiées par x_1 et x_2 . On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- 2 - Écrire le système d'équation sous forme matricielle lorsque celui ci est soumis à un forçage de la première pile.
- 3 - On cherche une solution sous forme complexe : $\underline{x}_1 = X_1 e^{i\omega t}$ et $\underline{x}_2 = X_2 e^{i\omega t}$. Déterminer les pulsations propres du système.
- 4 - Pour la pulsation ω_0 et $\sqrt{3}\omega_0$, représenter le mouvement associé de l'arche.

Exercice 2

Des systèmes para-sismiques appelés absorbeur dynamique permettent de diminuer l'amplitude du mouvement d'un bâtiment soumis à un déplacement du sol en ajoutant une masse libre oscillante à la construction comme illustré ci-dessous pour la tour Taipei 101.

On notera x_1 le mouvement de la masse M par rapport à sa position d'équilibre et x_2 celle de la masse m par rapport à sa position d'équilibre. On supposera que $\alpha = m/M = 10^{-3}$.

- 1 - Déterminer les équations vérifiées par x_1 et x_2 . On pose $\Omega = \sqrt{k/M}$ et $\omega_0 = \sqrt{k'/m}$.

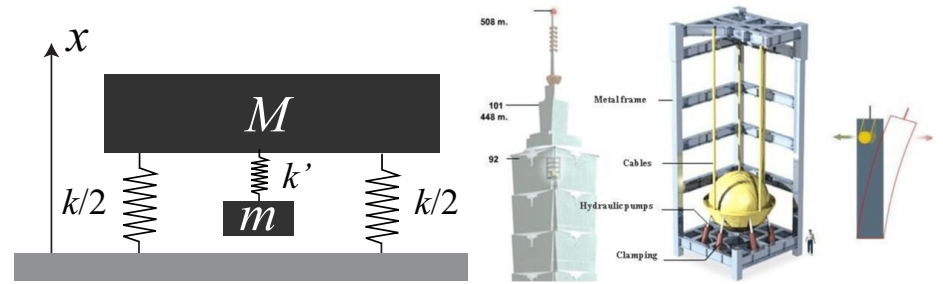


FIGURE 2 – Absorbeur dynamique

- 2 - À quelle fréquence d'oscillation le bâtiment risque-t'il des dommages ?
- 3 - Pour une pulsation propre du bâtiment Ω égal à la pulsation propre de l'absorbeur ω . Que vaut la constante de raideur k' ?
- 4 - Dans le cas $\Omega = \omega_0$, écrire le système d'équation sous forme matricielle lorsque celui ci est soumis à un forçage de la base à une pulsation ω .
- 5 - En déduire les pulsations propres du système à 2 ddl. Justifier l'intérêt d'un tel système ?
- 6 - Que faut il rajouter au système étudié pour éviter des amplitudes de mouvement trop élevé. Effectuer un schéma de votre proposition.

Exercice 3 On modélise un pont à 2 piles par 2 masses m reliées par 3 ressorts identiques k . On suppose la présence d'amortissement dans la partie centrale du pont, on notera α le coefficient de frottement fluide.

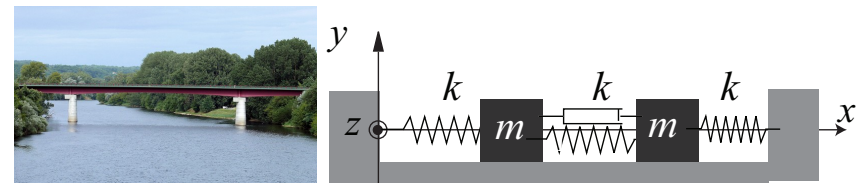


FIGURE 3 – Modélisation

On note x_1 le mouvement de la masse m_1 par rapport à sa position d'équilibre et x_2 celle de la masse m_2 par rapport à sa position d'équilibre.

- 1 - Déterminer les équations vérifiées par x_1 et x_2 . On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\xi\omega_0 = \alpha/m$.

2 - Écrire le système d'équation sous forme matricielle lorsque celui ci est soumis à un forçage de la première pile.

3 - On cherche une solution sous forme complexe : $\underline{x}_1 = X_1 e^{i\omega t}$ et $\underline{x}_2 = X_2 e^{i\omega t}$. Montrer qu'il existe une solution si

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{(3 - 4\xi^2) - 2i\xi\omega_0}$$

4 - Quelle est l'interprétation physique d'une pulsation complexe ?

5 - Représenter l'allure de l'amplitude des oscillations.

Exercice 4 Une maison à 1 étage peut être modélisée par une succession de 2 masses m et M correspondant au plancher du premier étage et à la charpente accrochées à des ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

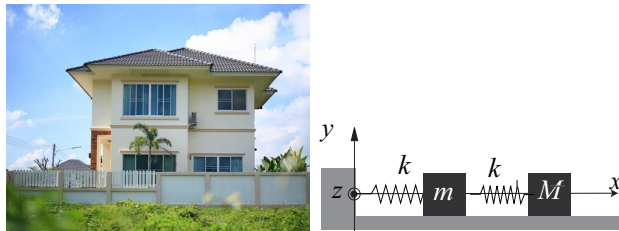


FIGURE 4 – Modélisation

1 - Écrire les équations du mouvement en notant x_1 et x_2 les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre.

2 - Écrire le système d'équation obtenu sous forme matricielle. On posera $\omega_0^2 = k/M$ et $\alpha = m/M$.

3 - Déterminer les pulsations propres du système et conclure sur la valeur de α .

Exercice 5 Le bâtiment de 5 étages ci-dessous est modélisé par une association de 5 masses identiques associées à 5 ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

1 - Écrire les équations du mouvement en notant $x_{i=1,\dots,5}$ les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre.

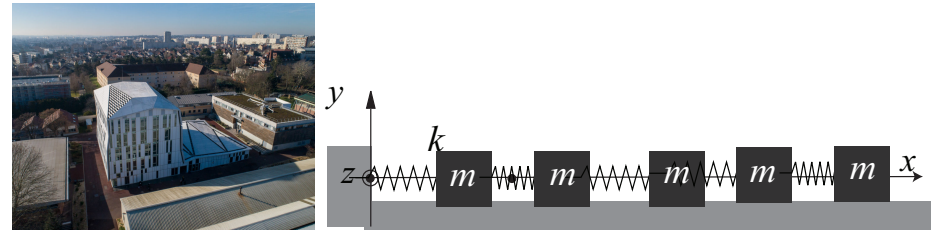


FIGURE 5 – Modélisation

2 - Définir la matrice des masses M , la matrice de raideur K pour ce système.

3 - Une résolution numérique permet de déterminer les valeurs propres réduites $x = \omega/\omega_0$:

$$0.29, 0.84, 1.32, 1.68, 1.92$$

4 - Dans le cas d'un forçage sinusoïdale par la base, représenter l'allure du mouvement d'une masse.