TD n°1 : Oscillations

Frottement Solide

Exercice 1 Certains dispositifs parasismiques appelés Friction Base Isolators (FBI) permettent de dissiper l'énergie d'un tremblement de terre en utilisant les frottements solides.

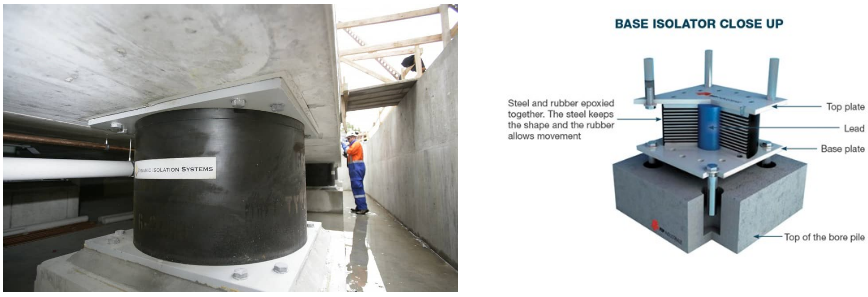
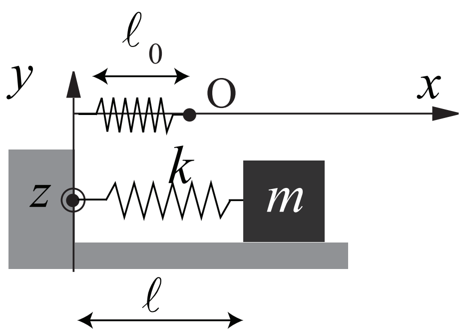


FIGURE 1 – Friction Base insulator : système parasismique (d'après https ://www.readymadeseminar.com/2015/06/base-isolation.html)

Afin de comprendre les différences avec le frottement fluide, on considère une masse m accrochée à une ressort et oscillant sur un plan horizontal. On note f le coefficient de frottement entre le support et le mobile. Le mouvement du mobile est repéré par $x(t)$, l'origine O de l'axe Ox coïncide avec la position du mobile lorsque le ressort est au repos.



On rappelle les lois de Coulomb, soit $\vec{\mathrm{T}}$ la composante tangentielle de la force de frottement et $\vec{\mathrm{N}}$ la composante normale. Dans le cas de non-glissement :

$$|\vec{\mathrm{T}}| < |\vec{\mathrm{N}}|$$

Dans le cas du glissement :

$$|\vec{\mathrm{T}}| = f \times |\vec{\mathrm{N}}|$$

1 - Déterminer l'élongation minimale permettant la mise en oscillation. On posera $x_c = fmg/k$.
2 - Cette condition étant réalisée, déterminer l'équation du mouvement $x(t)$ avec comme condition initiale : $x(0) = h$ et $\dot{x}(0) = 0$ ainsi que sa durée de validité. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3 - Déterminer la nouvelle équation du mouvement pour $t > \pi/\omega_0$.
4 - En déduire l'allure des oscillations et conclure sur les différences avec le frottement fluide.

Solution 1 *1 - Dans le référentiel galiléen associé au bâti, appliquons le principe fondamental de la dynamique au mobile. Ce dernier est soumis à*

- *la réaction du support :* $\vec{\mathrm{R}} = \vec{\mathrm{T}} + \vec{\mathrm{N}}$,
- *à la force de rappel du ressort :* $\vec{\mathrm{F}} = -kx\,\vec{e}_x$ *;*
- *à son poids :* $\vec{\mathrm{P}} = -mg\,\vec{e}_y$.

Ainsi,
$$m\vec{a} = \vec{\mathrm{R}} + \vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{P}}$$

Supposons le ressort étiré et le mobile à l'équilibre, on en déduit que

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{T} - k(\ell - \ell_0) \\ 0 = \mathrm{N} - mg \end{cases}$$

Plaçons nous à la limite du glissement, on en déduit que $\mathrm{T} = f\mathrm{N}$, *ainsi il vient :*

$$0 = fmg - k(\ell - \ell_0) \quad soit \quad \ell = \ell_0 + \frac{fmg}{k}$$

Évidemment, cette valeur s'obtient également pour un ressort comprimé,

Ainsi, $$\boxed{\ell = \ell_0 \pm \frac{fmg}{k} \quad soit \quad x = \pm\frac{fmg}{k}}$$

2 - En cas de glissement, nous avons : $\mathrm{T} = \pm fmg$*, ainsi dans le cas où* $\dot{x} < 0$*, l'équation selon* $\mathrm{O}x$ *devient :*

$$m\ddot{x} = -kx + fmg \quad soit \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = fg$$

La solution générale de cette équation est :

$$x(t) = \frac{fmg}{k} + \mathrm{A}\cos\omega_0 t + \mathrm{B}\sin\omega_0 t$$

L'application des conditions initiales donne :

$$x(t) = \frac{fmg}{k} + (h - \frac{fmg}{k})\cos\omega_0 t$$

La solution précédente est valable tant que $\dot{x} < 0$*, soit* $t < 2\pi/\omega_0$*. Dans le cas où* $\dot{x} > 0$*, l'équation selon* $\mathrm{O}x$ *devient :*

$$m\ddot{x} = -kx - fmg \quad soit \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -fg$$

La solution générale de cette équation est :

$$x(t) = -x_c + \mathrm{A}\cos\omega_0 t + \mathrm{B}\sin\omega_0 t$$

L'application des conditions initiales : $x(\pi/\omega_0) = -h + 2x_c$ *et* $\dot{x}(\pi/\omega_0) = 0$ *donne :*

$$x(t) = -x_c + (-h + 3x_c)\cos\omega_0 t$$

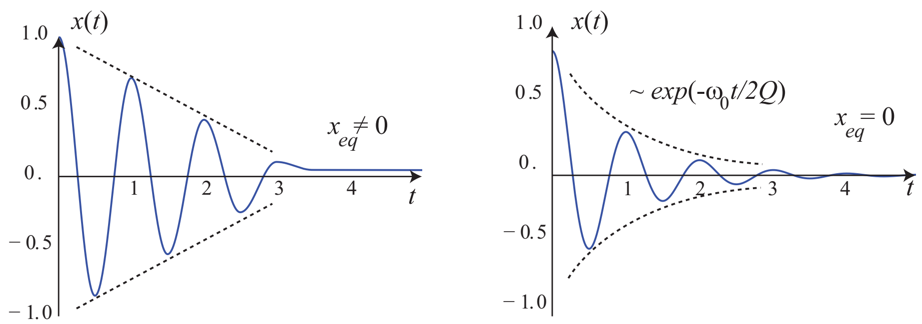


Figure 2 – Oscillations avec force de frottement solide (gauche) ou visqueux (droite)

Ainsi l'amplitude des oscillations pour $\dot{x} > 0$ *est diminuée de* $2x_c$ *sur une demi-période. Le mobile s'arrête lorsque la force du ressort n'est plus suffisante pour engendrer le glissement c'est à dire lorsque* $|x(n\pi/\omega)| < x_c$*. Le nombre maximale d'oscillations est donc donné par*

$$\mathrm{N}_{max} = \frac{h}{4x_c}$$

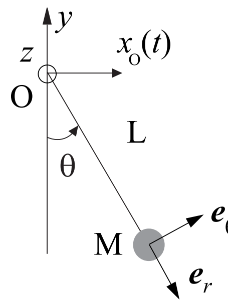
En résolvant sur chaque demi-période d'indice p, on pourrait montrer que l'expression générale peut être mise sous la forme :

$$x(t) = (-1)^p x_c + (-1)^p\Big(h - (2p+1)x_c\Big)\cos\omega_0 t$$

Remarque 1 :
On retiendra que l'enveloppe des oscillations est linéaire dans le cas d'un frottement solide alors qu'elle est exponentielle pour du frottement fluide

Oscillations forcées

Exercice 2



On considère un pendule simple constitué d'une masse M suspendue par un fil de longueur L. Le point de suspension O, attaché au sol, est soumis, par rapport au référentiel $\mathcal{R}_\mathcal{G}$, galiléen fixe, à un déplacement horizontal d'origine sismique $x_\mathrm{O}(t)$. on note $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ le référentiel lié au sol.

1 - Écrire l'équation du mouvement angulaire du pendule dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. La linéariser dans l'hypothèse des petits mouvements angulaires. En déduire l'équation différentielle reliant le déplacement $\theta(t)$ de la masse M à celui $x_0(t)$ du sol.

2 - Si $x_0(t) = \mathrm{X}_0 \cos \omega t$, déterminer l'amplitude des oscillations $\Theta(\omega)$, où $\theta(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t + \phi)$.

Données : on rappelle que la force d'inertie d'entraînement en référentiel non-galiléen est donnée par $\vec{\mathrm{F}}_{ie} = -m\vec{a}_\mathrm{O}$.

Solution 2 *1 - Plaçons nous dans le référentiel en translation $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. La masse* M *est alors soumise à*

- *son poids* $\vec{\mathrm{P}} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$ *;*
- *la tension du fil* $\vec{\mathrm{T}} = -\mathrm{T}\,\vec{e}_r$ *;*
- *la force d'inertie d'entraînement* $\vec{\mathrm{F}_{ie}} = -m\ddot{x}_0\,\vec{e}_x = -m\ddot{x}_0(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$ *;*
- *la force d'inertie de Coriolis* $\vec{\mathrm{F}_{ie}} = \vec{0}$ *puisque $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ est en translation.*

Comme il s'agit d'un pendule, appliquons le théorème du moment cinétique. Suivant $\vec{e}_z$ il vient

$$m\mathrm{L}^2\ddot{\theta} = -\mathrm{M}g\mathrm{L}\sin\theta - m\mathrm{L}\ddot{x}_0\cos\theta$$

Dans l'hypothèse des petits angles, on a $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$. Il vient

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\mathrm{L}}\theta = -\frac{\ddot{x}_0}{\mathrm{L}}}$$

2 - Utilisons la notation complexe

$$\underline{x}_0 = \mathrm{X}_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{\theta} = \underline{\Theta} e^{j\omega t}$$

On obtient le résultat suivant

$$\underline{\Theta} = \frac{-\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\frac{\mathrm{X}_0}{\mathrm{L}} \text{ avec } \omega_0^2 = g/\mathrm{L}$$

soit

$$\boxed{\Theta = |\underline{\Theta}| = \frac{\omega^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|}\frac{\mathrm{X}_0}{\mathrm{L}}}$$

Exercice 3

Deux amortisseurs ont été ajoutés à la tour John Hancock Tower de Boston pour réduire le déplacement dû au vent. Chaque amortisseur pèse 2700 kN et est constitué d'une boîte en acier de 5,2 m de côté et de 1 m de hauteur, remplie de plomb. Ce système a été réalisé par LeMessurier Associates/SCI en association with MTS System Corp., pour un coût de 3 million dollars.

On notera k la constante de raideur des ressorts et α le coefficient d'amortissment.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ repérant le mouvement de la masse m_d. On écrira l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2 - Sachant que la période d'oscillations est de 6,28 s, déterminer la constante de raideur k.

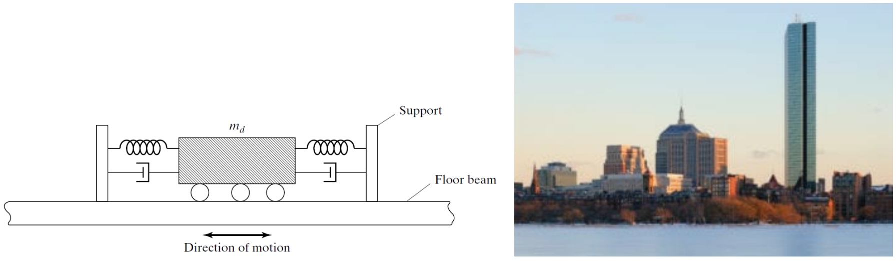


FIGURE 3 – Système d'amortissement de la tour Hancock

3 - Avec $\xi = 10\%$, représenter l'allure de l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence.
4 - Quelle la gamme de fréquence qui est utilisable par cet amortisseur.

Exercice 4

D'après Banque PT 05

Un sismomètre pendule est constitué d'une masse m reliée à un châssis solidaire du sol auquel on associe le référentiel $\mathcal{R}'$. Ce dernier vibre avec une amplitude $u = u_0 \cos \omega t$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. La liaison de m au bâti est modélisée par un comportement élastique de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un frottement fluide caractérisé par la constante γ.

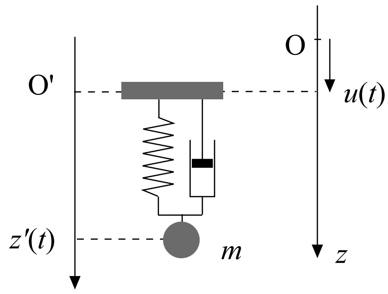


FIGURE 4 – Sismomètre.

1 - Déterminer la longueur Z_0 du ressort lorsque le système est au repos en l'absence de tremblement de terre.
2 - En raisonnant dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié au sol, on pose

$$\mathrm{Z}(t) = z'(t) - \mathrm{Z}_0$$

Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$\ddot{\mathrm{Z}} + 2\zeta\omega_0\dot{\mathrm{Z}} + \omega_0^2\mathrm{Z} = -\ddot{u}$$

.

3 - Dans le cas de mouvements très rapides (de hautes fréquences), quel est le terme prépondérant (dans le premier membre). En déduire ce que représente $\mathrm{Z}(t)$.
4 - Même question dans le cas de mouvements très lents.

Solution 3 *1 - Le système $\{m\}$ dans un référentiel galiléen associé au sol (en l'absence de tremblement de terre), est soumis*

- *à son poids $\vec{\mathrm{P}} = mg\,\vec{e}_z$;*
- *à la tension du ressort $\vec{\mathrm{T}} = -k(z'(t) - \ell_0)\,\vec{e}_z$.*

Lorsque la masse est immobile, $\vec{\mathrm{T}} + \vec{\mathrm{P}} = \vec{0}$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{Z}_0 = \ell_0 + mg/k}$$

2 - Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la masse est soumise à

- *son poids $\vec{\mathrm{P}} = mg\,\vec{e}_z$;*
- *la tension du ressort $\vec{\mathrm{T}} = -k(z'(t) - \ell_0)\,\vec{e}_z$; la force de frottement $\vec{f} = -\gamma\dot{z}\,\vec{e}_z$;*
- *la force d'inertie d'entraînement $\vec{\mathrm{F}}_{ie} = -m\ddot{u}\,\vec{e}_z$;*
- *la force d'inertie de Coriolis $\vec{\mathrm{F}}_{ic} = \vec{0}$ puisque le référentiel est en translation.*

La projection de la 2° loi de Newton suivant $\vec{e}_z$ conduit à

$$m\ddot{z}' = mg - k(z'(t) - \ell_0) - \gamma\dot{z} - m\ddot{u}\,\vec{e}_z$$

En utilisant la variable Z*, comme* $\dot{\mathrm{Z}} = \dot{z}$ *et* $\ddot{\mathrm{Z}} = \ddot{z}$*, il vient*

$$\boxed{\ddot{\mathrm{Z}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\mathrm{Z}} + \frac{k}{m}\mathrm{Z} = -\ddot{u}}$$

soit $$\boxed{\eta = \gamma/2m \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = k/m}$$

3 - Pour des mouvements rapides, en utilisant la notation complexe, l'équation devient

$$-\omega^2\underline{\mathrm{Z}} + 2j\eta\omega\underline{\mathrm{Z}} + \omega_0^2\underline{\mathrm{Z}} = \omega^2\underline{u}$$

Le terme dominant est $\ddot{\mathrm{Z}} \sim -\omega^2\mathrm{Z}$*, ainsi* $\ddot{\mathrm{Z}} = -\ddot{u}$

soit $$\boxed{\mathrm{Z}(t) = -u(t) + \mathrm{C}^{te}}$$

L'amplitude des oscillations représente donc le déplacement du sol à une phase π près.
4 - Pour des mouvements très lents, Ainsi, avec $\omega \ll \omega_0$ *, le terme prépondérant est donc* $\omega_0^2\mathrm{Z}$*. On en déduit que*

$$\boxed{\mathrm{Z}(t) \approx -\ddot{u}/\omega_0^2}$$

Ainsi Z(t) *représente l'accélération du sol. L'amplitude de* Z *est alors très faible.*

Exercice 5

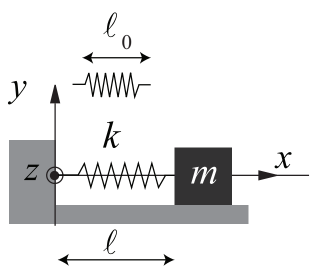
Un pont suspendu subit une rénovation de chaussée par un camion située au milieu du pont. Le système est équivalent à une masse m accrochée à un ressort amorti et soumis à une force d'excitation $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \cos\omega t$.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre. On posera $\mathrm{X}_{stat} = \mathrm{F}/k$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\zeta\omega_0 = \alpha/m$.
2 - Déterminer la solution sous la forme $x(t) = \mathrm{X}(\omega)\cos(\omega t + \phi)$ en explicitant les expressions de $\mathrm{X}(\omega)$ et $\phi(\omega)$.
3 - Représenter $\mathrm{X}(\omega)$ pour $\zeta = 1$, $\zeta = 0{,}5$ et $\zeta = 0{,}1$.

Manipulation des transformées de Laplace

Exercice 6

Un système élémentaire masse-ressort, est soumis à une secousse de la forme $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0\delta(t)$.
1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
2 - Pour un mouvement sinusoïdal déterminer la fonction de transfert $\mathrm{H}(p) = \underline{\mathrm{X}}/\mathrm{F}$.



3 - En déduire l'expression de $x(t)$.
4 - Si l'excitation est de la forme $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0\Theta(t)/\omega_0$ où Θ est la fonction de heaviside, déterminer $x(t)$.

Données :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\Theta(t)) = p$$

$$\mathcal{L}(\cos\beta t) = \frac{p}{p^2+\beta^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin\beta t) = \frac{\beta}{r^2+\beta^2}$$

Solution 4 *1 - L'équation différentielle est :*

$$m\ddot{x} + kx = k\ell_0 + \mathrm{F}(t)$$

2 - Posons $x' = x(t) - \ell_0$, il vient :

$$\ddot{x}' + \omega_0^2 x' = \mathrm{F}(t)/m$$

Utilisons la transformée de Laplace, on obtient :

$$p^2\mathrm{X} + \omega_0^2\mathrm{X} = \mathrm{F}_0/m \quad \textit{soit} \quad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{F}_0/m}{p^2+\omega_0^2}$$

3 - En utilisant la transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{F}_0}{m\omega_0}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}\right) = \frac{\mathrm{F}_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

4 - Pour cette nouvelle fonction :

$$p^2\mathrm{X} + \omega_0^2\mathrm{X} = \mathrm{F}_0 p/m \quad \textit{soit} \quad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{F}_0}{m\omega_0}\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{F}_0}{m\omega_0}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega_0^2}\right) = \frac{\mathrm{F}_0}{m\omega_0}cos\omega_0 t$$

Exercice 7

Un camion passe sur un ralentisseur à côté d'une structure modélisée par le système ci-dessous. On note $x(t)$ la position de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre et $y(t)$ celle du sol.

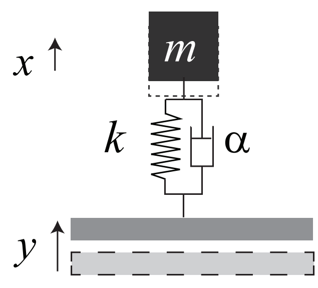


FIGURE 5 – Système excité par la base

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\zeta\omega_0 = \alpha/m$.
2 - Par quelle fonction peut on modéliser l'excitation induite par le camion ?
3 - Pour un mouvement sinusoïdal de la base à la pulsation ω, déterminer la fonction de transfert du système appelée transmissibilité en déplacement : $\mathrm{H}(\omega) = \underline{\mathrm{X}}/\underline{\mathrm{Y}}$.
4 - En déduire l'expression de $x(t)$.

Données :

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos\beta t) = \frac{p(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(e^{\alpha t}\sin\beta t) = \frac{p\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$