TD n°1 : Oscillations

Frottement Solide

Exercice 1 Certains dispositifs parasismiques appelés Friction Base Isolators (FBI) permettent de dissiper l'énergie d'un tremblement de terre en utilisant les frottements solides.

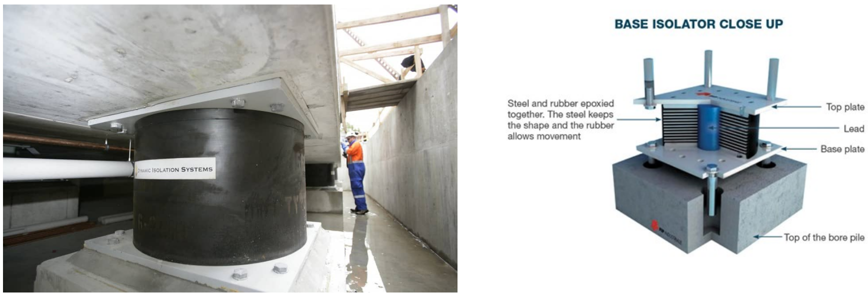
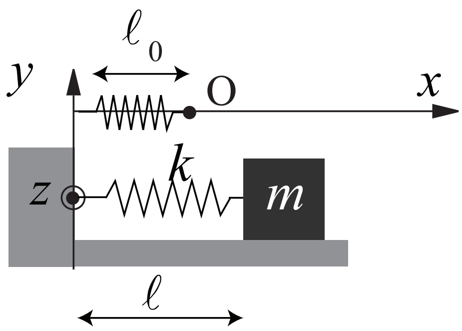


FIGURE 1 – Friction Base insulator : système parasismique (d'après https ://www.readymadeseminar.com/2015/06/base-isolation.html)



Afin de comprendre les différences avec le frottement fluide, on considère une masse m accrochée à une ressort et oscillant sur un plan horizontal. On note f le coefficient de frottement entre le support et le mobile. Le mouvement du mobile est repéré par $x(t)$, l'origine O de l'axe Ox coïncide avec la position du mobile lorsque le ressort est au repos.

On rappelle les lois de Coulomb, soit $\vec{\mathrm{T}}$ la composante tangentielle de la force de frottement et $\vec{\mathrm{N}}$ la composante normale. Dans le cas de non-glissement :

$$|\vec{\mathrm{T}}| < |\vec{\mathrm{N}}|$$

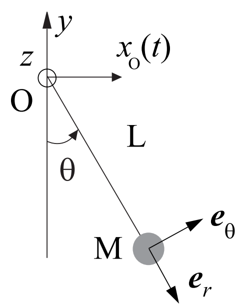
Dans le cas du glissement :

$$|\vec{\mathrm{T}}| = f \times |\vec{\mathrm{N}}|$$

1 - Déterminer l'élongation minimale permettant la mise en oscillation. On posera $x_c = fmg/k$.
2 - Cette condition étant réalisée, déterminer l'équation du mouvement $x(t)$ avec comme condition initiale : $x(0) = h$ et $\dot{x}(0) = 0$ ainsi que sa durée de validité. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3 - Déterminer la nouvelle équation du mouvement pour $t > \pi/\omega_0$.
4 - En déduire l'allure des oscillations et conclure sur les différences avec le frottement fluide.

Oscillations forcées

Exercice 2



On considère un pendule simple constitué d'une masse M suspendue par un fil de longueur L. Le point de suspension O, attaché au sol, est soumis, par rapport au référentiel $\mathcal{R}_\mathcal{G}$, galiléen fixe, à un déplacement horizontal d'origine sismique $x_\mathrm{O}(t)$. on note $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ le référentiel lié au sol.
1 - Écrire l'équation du mouvement angulaire du pendule dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. La linéariser dans l'hypothèse des petits mouvements angulaires. En déduire l'équation différentielle reliant le déplacement $\theta(t)$ de la masse M à celui $x_0(t)$ du sol.
2 - Si $x_0(t) = \mathrm{X}_0 \cos \omega t$, déterminer l'amplitude des oscillations $\Theta(\omega)$, où $\theta(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t + \phi)$.

Données : on rappelle que la force d'inertie d'entraînement en référentiel non-galiléen est donnée par $\vec{\mathrm{F}}_{ie} = -m\vec{a}_{\mathrm{O}}$.

Exercice 3

Deux amortisseurs ont été ajoutés à la tour John Hancock Tower de Boston pour réduire le déplacement dû au vent. Chaque amortisseur pèse 2700 kN et est constitué d'une boîte en acier de 5,2 m de côté et de 1 m de hauteur, remplie de plomb. Ce système a été réalisé par LeMessurier Associates/SCI en association with MTS System Corp., pour un coùt de 3 million dollars.

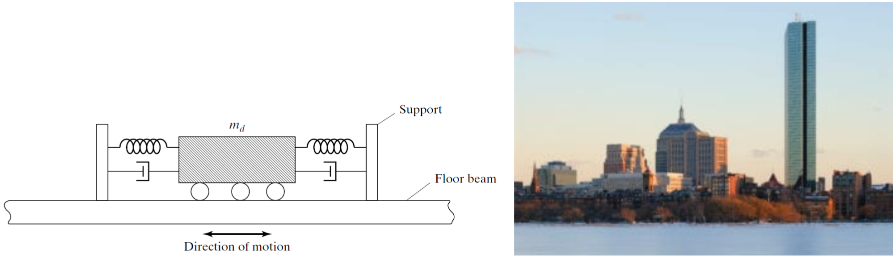


FIGURE 2 – Système d'amortissement de la tour Hancock

On notera k la constante de raideur des ressorts et α le coefficient d'amortissment.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ repérant le mouvement de la masse m_d. On écrira l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2 - Sachant que la période d'oscillations est de 6,28 s, déterminer la constante de raideur k.

3 - Avec $\xi = 10\%$, représenter l'allure de l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence.

4 - Quelle la gamme de fréquence qui est utilisable par cet amortisseur.

Exercice 4

D'après Banque PT 05

Un sismomètre pendule est constitué d'une masse m reliée à un châssis solidaire du sol auquel on associe le référentiel $\mathcal{R}'$. Ce dernier vibre avec une amplitude $u = u_0 \cos\omega t$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. La liaison de m au bâti est modélisée par un comportement élastique de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un frottement fluide caractérisé par la constante γ.

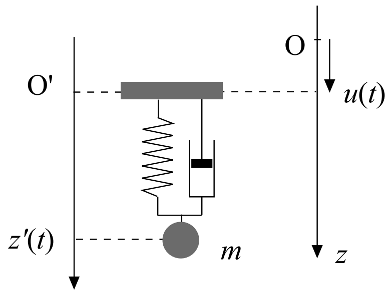


FIGURE 3 – Sismomètre.

1 - Déterminer la longueur Z_0 du ressort lorsque le système est au repos en l'absence de tremblement de terre.

2 - En raisonnant dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié au sol, on pose

$$\mathrm{Z}(t) = z'(t) - \mathrm{Z}_0$$

Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$\ddot{\mathrm{Z}} + 2\zeta\omega_0\dot{\mathrm{Z}} + \omega_0^2\mathrm{Z} = -\ddot{u}$$

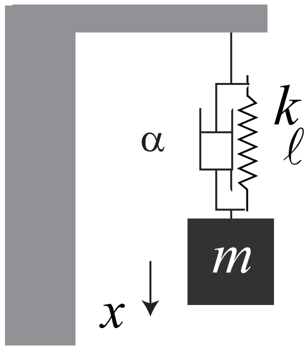
.

3 - Dans le cas de mouvements très rapides (de hautes fréquences), quel est le terme prépondérant (dans le premier membre). En déduire ce que représente $\mathrm{Z}(t)$.

4 - Même question dans le cas de mouvements très lents.

Exercice 5

Un pont suspendu subit une rénovation de chaussée par un camion située au milieu du pont. Le système est équivalent à une masse m accrochée à un ressort amorti et soumis à une force d'excitation $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \cos\omega t$.

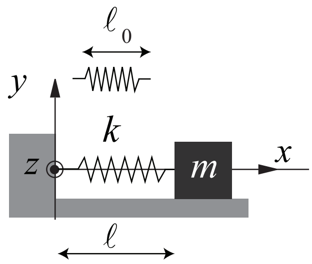


1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre. On posera $\mathrm{X}_{stat} = \mathrm{F}/k$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\zeta\omega_0 = \alpha/m$.
2 - Déterminer la solution sous la forme $x(t) = \mathrm{X}(\omega)\cos(\omega t + \phi)$ en explicitant les expressions de $\mathrm{X}(\omega)$ et $\phi(\omega)$.
3 - Représenter $\mathrm{X}(\omega)$ pour $\zeta = 1$, $\zeta = 0{,}5$ et $\zeta = 0{,}1$.

Manipulation des transformées de Laplace

Exercice 6

Un système élémentaire masse-ressort, est soumis à une secousse de la forme $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0\delta(t)$.



1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
2 - Pour un mouvement sinusoïdal déterminer la fonction de transfert $\mathrm{H}(p) = \underline{\mathrm{X}}/\mathrm{F}$.
3 - En déduire l'expression de $x(t)$.
4 - Si l'excitation est de la forme $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0\Theta(t)/\omega_0$ où Θ est la fonction de heaviside, déterminer $x(t)$.

Données :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\Theta(t)) = p$$

$$\mathcal{L}(\cos\beta t) = \frac{p}{p^2+\beta^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin\beta t) = \frac{\beta}{r^2+\beta^2}$$

Exercice 7

Un camion passe sur un ralentisseur à côté d'une structure modélisée par le système ci-dessous. On note $x(t)$ la position de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre et $y(t)$ celle du sol.

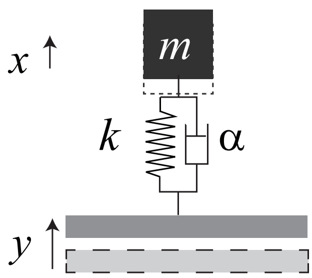


FIGURE 4 – Système excité par la base

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $2\zeta\omega_0 = \alpha/m$.
2 - Par quelle fonction peut on modéliser l'excitation induite par le camion ?
3 - Pour un mouvement sinusoïdal de la base à la pulsation ω, déterminer la fonction de transfert du système appelée transmissibilité en déplacement : $\mathrm{H}(\omega) = \underline{\mathrm{X}}/\underline{\mathrm{Y}}$.
4 - En déduire l'expression de $x(t)$.

Données :

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos\beta t) = \frac{p(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(e^{\alpha t}\sin\beta t) = \frac{p\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$