DS9 - Filière MP

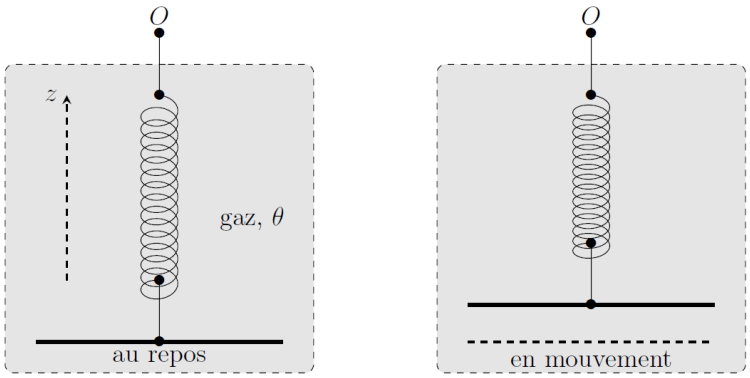
Mardi 1er avril 2025

Durée : 2 heures

Ce sujet est constitué de 3 problèmes indépendants. Une attention particulière sera portée à la présentation de la copie (encadrement des résultats, marges, lisibilité de l'écriture, propreté, etc) qui sera prise en compte dans le barème. Si le candidat pense détecter une erreur d'énoncé, il poursuit sa composition en expliquant les initiatives qu'il est amené à prendre le cas échéant.

Probleme 1: Expérience de Kappler

On dispose au sein d'un gaz thermostaté à la température θ, une plaque de masse m retenue par un ressort vertical de raideur $k = 1/\sigma$, disposée dans le champ de pesanteur d'intensité g (figure ci-dessous). Sous l'action des chocs des molécules du gaz, cette plaque se déplace de manière aléatoire le long du seul axe vertical (Oz) de part et d'autre de sa position d'équilibre z_0 ; on parle de *mouvement brownien*.



1. Le point d'attache du ressort est en $z = 0$ et on note ℓ_0 sa longueur à vide. Déterminer la position d'équilibre z_0 puis exprimer l'énergie potentielle totale dont dérivent les forces élastiques et de pesanteur en fonction seulement de σ et $z' = z - z_0$.

Solution : Système : Miroir : Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

Au repos, le PDF appliqué au miroir en projection sur Oz s'écrit :

$0 = -mg + k(\ell - \ell_0) = -mg + k(-z_0 - \ell_0)$ soit $\boxed{z_0 = -\ell_0 - \dfrac{mg}{k}}$

Attention, le paramétrage était un peu « méchant » : la longueur du ressort est $-z$, car l'axe est orienté vers le haut et l'origine est au dessus...

La résultante des forces est donnée par $\vec{F} = -mg + k(-z - \ell_0)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z + k\left(-z + z_0 + \dfrac{mg}{k}\right)\vec{e}_z = k(-z + z_0)\vec{e}_z$.

Or $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_p)$ soit $k(-z + z_0) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}$, on en déduit : $E_p = \dfrac{1}{2}k(z - z_0)^2 + C^{\text{te}}$. En choisissant arbitrairement la constante nulle et en posant $z' = z - z_0$ et $\sigma = 1/k$, on obtient :

$$\boxed{E_p(z') = \frac{z'^2}{2\sigma}}$$

Dans ce qui suit on pourra introduire la fonction $E_p(z') = \dfrac{z'^2}{2\sigma}$.

On admet que les valeurs de z' lors du mouvement brownien sont alors régies par la loi de probabilité de Boltzmann : on note $k_B = 1{,}4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ la constante de Boltzmann et $P(z')\mathrm{d}z'$ est la probabilité pour que la plaque soit disposée entre les altitudes z' et $z' + \mathrm{d}z'$. On admet donc l'expression $P(z') = \dfrac{1}{\xi(\theta)}\exp(-\gamma(\theta)z'^2)$.

On donne les valeurs des intégrales : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-at^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ et $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-at^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$.

2. Exprimer $\gamma(\theta)$ et calculer $\xi(\theta)$ en fonction de $k_B\theta$ et σ.

Solution : D'après la loi de Boltzmann, le facteur exponentiel doit s'écrire $\exp\left(\frac{-E_p}{k_B\theta}\right) = \exp\left(\frac{-z'^2}{2\sigma k_B\theta}\right)$. Par identification on a donc $\boxed{\gamma(\theta) = \frac{1}{2\sigma k_B\theta}}$.

De plus, la condition de normalisation s'écrit $\int_{-\infty}^{\infty} P(z')\mathrm{d}z' = 1$, soit en utilisant la parité de $P(z')$:

$$\frac{2}{\xi(\theta)}\int_0^{\infty}\exp(-\gamma(\theta)z'^2)\mathrm{d}z' = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi(\theta)}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma(\theta)}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\xi(\theta) = \sqrt{2\pi\sigma k_B\theta}}$$

3. Sans faire de calcul, que vaut la valeur moyenne $\langle z'\rangle$?

Solution : Par définition : $\langle z'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z'P(z')\mathrm{d}z'$. Or $P(z')$ est paire, donc $z'P(z')$ est impaire. On en déduit que $\langle z'\rangle = 0$.

Autre possibilité : la force moyenne appliquée par le gaz sur le miroir n'ayant pas de direction privilégiée, elle est identique sur la surface du dessous et du dessus. En moyenne, le miroir est donc à sa position d'équilibre mécanique, donc $z = z_0$ en moyenne, soit $\boxed{\langle z'\rangle = 0}$

4. Calculer la valeur moyenne $\langle z'^2\rangle$; commenter au regard du théorème d'équipartition.

Solution : $\langle z'^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z'^2P(z')\mathrm{d}z' = 2\int_0^{\infty} z'^2P(z')\mathrm{d}z' = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma k_BT}}\int_0^{\infty} z'^2\exp(-\gamma(\theta)z'^2)\mathrm{d}z' = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma k_BT}}\times\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi(2\sigma k_B\theta)^3}}{\sqrt{2\pi\sigma k_B\theta}}$ soit :

$$\boxed{\langle z'^2\rangle = \sigma k_B\theta}$$

On en déduit que $\langle E_p(z')\rangle = \frac{\langle z'^2\rangle}{2\sigma} = \frac{1}{2}k_B\theta$. Cela est parfaitement cohérent avec le théorème d'équipartition, qui précise que chaque terme quadratique indépendant dans l'énergie du système (ce qui est le cas de E_p ici) stocke une énergie moyenne égale à $\frac{1}{2}k_B\theta$.

En 1931, le physicien allemand Eugen Kappler a publié dans la revue *Annalen der Physik* les résultats d'une expérience basée sur ce principe en utilisant un miroir suspendu à un fil de torsion vertical (ressort en rotation). L'expérience concluait à la validité de la loi de Boltzmann avec une mesure précise de la constante de Boltzmann.

5. Connaissez-vous d'autres cas de mouvement brownien ? D'autres expériences ayant conduit à une vérification expérimentale de la loi de Boltzmann ?

Solution : Les mouvements browniens peuvent servir à modéliser le mouvement désordonné des particules en suspension dans l'eau , ou encore le prix d'une action en économie.

Une expérience célèbre ayant permis de vérifier expérimentalement la loi de Boltzmann est l'une des expériences de Jean Perrin (étude de grains de pollen en suspension dans l'eau).

Probleme 2: Effets quantiques dans les rebonds de neutrons

Les neutrons peuvent rebondir élastiquement (sans perte d'énergie cinétique) sur une paroi de nickel parfaitement lisse lorsque leur vitesse perpendiculaire à la paroi ne dépasse pas quelques mètres par seconde. Ce problème décrit une expérience réalisée en 2002 à l'Institut Laue-Langevin (Grenoble), où des neutrons tombant sous l'effet de la gravité rebondissent sur une plaque horizontale. Cette expérience a révélé pour la première fois des effets quantiques dans un phénomène gravitationnel.

Notations et données numériques

— Constante de Planck réduite : $\hbar = 10^{-34}$ J · s

— Accélération de la pesanteur : $g = 10$ m · s^{-2}

— Masse du neutron : $m = 10^{-27}$ kg

— Équation de Schrödinger à une dimension : $i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$

— Expression du vecteur densité de courant de probabilité pour un état stationnaire d'une particule libre : $\vec{J} = \dfrac{\hbar\vec{k}}{m}|A|^2$ où A est l'amplitude de la fonction d'onde.

Une paroi de nickel plane se comporte, pour des neutrons de faible vitesse, comme une marche de potentiel de hauteur V_0 avec $V_0 > 0$. On considère un système de coordonnées cartésiennes tel que la paroi est en $x = 0$. L'énergie potentielle $V(x)$ est nulle pour $x < 0$, et vaut V_0 pour $x > 0$. On néglige les effets de la gravité.

1. On suppose que le neutron se déplace suivant l'axe x. Modéliser une paroi comme une marche de potentiel uniforme se justifie si la longueur d'onde de de Broglie du neutron est beaucoup plus grande que la distance entre deux atomes de la paroi (de l'ordre de la taille d'un atome). Cette condition est-elle respectée si la vitesse du neutron est 10 m·s^{-1} ?

Solution : La longueur d'onde de de Broglie est $\lambda_{DB} = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{6.10^{-34}}{10^{-24}\cdot 10^{1}} = 6\times 10^{-11}$ m.

La taille d'un atome est de quelques 10^{-10} m. L'inégalité est vérifiée, mais pas l'inégalité large : **cette condition n'est donc pas respectée**.

2. On considère un état stationnaire d'énergie E. Rappeler sans démonstration la forme $\Psi(x,t)$ de la fonction d'onde correspondante, et établir l'équation différentielle satisfaite par la partie spatiale de la fonction d'onde $\psi(x)$ pour $x < 0$ et $x > 0$. Rappeler les conditions de continuité en $x = 0$.

Solution : Un état stationnaire d'énergie E est tel que $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$. En reportant dans l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x)$$

soit encore

$$\boxed{\psi''(x) + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi(x) = 0}$$

De plus, on sait que $\psi(x)$ **est toujours continue**, et que si les discontinuités de V sont finies, ce qui est le cas ici, $\psi'(x)$ **est également continue**.

3. Déterminer l'expression complète de $\psi(x)$ pour un neutron incident sur la marche de potentiel, arrivant de la direction $x < 0$ dans le cas $E < V_0$. On posera A l'amplitude de l'onde incidente, et on notera $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ et $q = \sqrt{\dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$.

Solution :

Cas $E < V_0$: en posant $k_1 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$ et $q = \dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$, la solution générale s'écrit :

$$\psi(x) = A_{1+}e^{ik_1x} + A_{1-}e^{-ik_1x} \text{ pour } x < 0 \text{ et } \psi(x) = A_{2+}e^{qx} + A_{2-}e^{-qx} \text{ pour } x > 0$$

On doit prendre $A_{2+} = 0$, car sinon le terme correspondant diverge pour $x \to +\infty$.

On pose de même que précédemment A, A_r et A_t. Les conditions de continuité se traduisent par :

$$\begin{cases} A + A_r &= A_t \\ ik_1A - ik_1A_r &= -qA_t \end{cases}$$

Système dont la résolution conduit à $A_r = \dfrac{ik_1+q}{ik_1-q}A$ et $A_t = \dfrac{2ik_1}{ik_1-q}A$. Finalement :

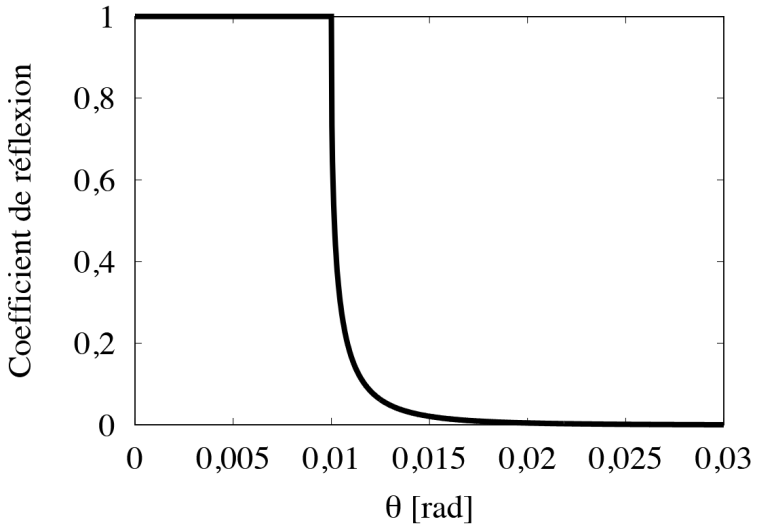
$$\boxed{\psi(x) = A\left(e^{ik_1x} + \frac{ik_1+q}{ik_1-q}e^{-ik_1x}\right)} \text{ pour } x < 0 \text{ et } \boxed{\psi(x) = A\frac{2ik_1}{ik_1-q}e^{-qx}} \text{ pour } x > 0$$

4. Montrer que pour $E < V_0$, les neutrons sont totalement réfléchis. Déterminer la vitesse v_c au-dessous de laquelle un neutron est totalement réfléchi par la marche de potentiel, en fonction de m et V_0.

Solution : Calculons le coefficient de réflexion en probabilité dans le cas $E < V_0$. On a $R = \dfrac{||\vec{J_r}||}{||\vec{J_i}||} = \left|\dfrac{ik+q}{ik-q}\right|^2 = 1$. Les neutrons sont donc totalement réfléchis.

Cela correspond à la vitesse telle que $E = V_0$. Or $E = E_c$ dans le domaine où $V = 0$, donc la vitesse limite v_c est telle que $V_0 = \dfrac{1}{2}mv_c^2$ soit $\boxed{v_c = \sqrt{\dfrac{2V_0}{m}}}$

5. On envoie un faisceau parallèle de neutrons monocinétiques de vitesse $v_0 = 500$ m·s^{-1} sous incidence oblique sur une paroi de nickel. On appelle θ l'angle entre le faisceau incident et la surface de la paroi. Les composantes de la vitesse parallèles à la paroi sont conservées lors de l'interaction, et le calcul du coefficient de réflexion reste valide pour la composante normale à la paroi. À partir de la courbe expérimentale ci-dessous, déterminer la valeur numérique de v_c pour le nickel.



Solution : On constate que les neutrons sont totalement réfléchis pour un angle $\theta = 0{,}01$ rad. La vitesse orthogonale à la paroi est simplement $v_\perp = v_0 \sin(\theta) \approx v_0\theta$ (approximation des petits angles). On a donc $v_c \approx 5{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

6. Déterminer l'expression complète de $\psi(x)$ pour un neutron incident sur la marche de potentiel, arrivant de la direction $x < 0$ dans le cas $E > V_0$. On posera $k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$.

Solution : Cas $E > V_0$: en posant $k_1 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$ et $k_2 = \dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$, la solution générale s'écrit :

$$\psi(x) = A_{1+}e^{ik_1x} + A_{1-}e^{-ik_1x} \text{ pour } x < 0 \text{ et } \psi(x) = A_{2+}e^{ik_2x} + A_{2-}e^{-ik_2x} \text{ pour } x > 0$$

On peut prendre $A_{2-} = 0$, car cela correspond à un neutron arrivant des $x > 0$.
On pose A l'amplitude de l'onde incidente ($A = A_{1+}$), A_r celle de l'onde réfléchie ($A_r = A_{1-}$) et A_t celle de l'onde transmise ($A_t = A_{2+}$). Les conditions de continuité se traduisent par :

$$\begin{cases} A + A_r &= A_t \\ ik_1A - ik_1A_r &= ik_2A_t \end{cases}$$

Système dont la résolution (simple) conduit à $A_r = \dfrac{k_1-k_2}{k_2+k_1}A$ et $A_t = \dfrac{2k_1}{k_2+k_1}A$. Finalement :

$$\boxed{\psi(x) = A\left(e^{ik_1x} + \frac{k_1-k_2}{k_2+k_1}e^{-ik_1x}\right)} \text{ pour } x < 0 \text{ et } \boxed{\psi(x) = A\frac{2k_1}{k_2+k_1}e^{-ik_2x}} \text{ pour } x > 0$$

7. (a) Montrer qu'en incidence normale, le coefficient de réflexion en probabilité vaut $R = \left(\dfrac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2$.

Solution : On commence par trouver le coefficient de réflexion en probabilité dans le cas où $E > V_0$:

$$R = \frac{||\vec{J_r}||}{||\vec{J_i}||} = \frac{\frac{\hbar k_1}{m}|A_r|^2}{\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2} = \frac{|A_r|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2.$$

On simplifie en utilisant les expressions de k_1 et k_2 : $\boxed{R = \left(\dfrac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2}$

(b) En déduire que la fraction de neutrons réfléchis en fonction de θ et de l'angle critique θ_c en-dessous duquel il y a réflexion totale peut s'écrire :

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta}\right)^2}} \right)^2$$

Solution : Si $\theta < \theta_c$, on a $E < V_0$ donc il y a réflexion totale.
Si $\theta > \theta_c$, l'énergie des neutrons incidents est $E > V_0$: il a réflexion partielle.
De plus, d'après la question précédente, la vitesse à prendre en compte pour le calcul de l'énergie incidente est $v_0 \sin(\theta)$, donc on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_0 \sin\theta)^2 &= E \\ \frac{1}{2}m(v_0 \sin\theta_c)^2 &= V_0 \end{cases}$$

En reportant dans l'expression de R et en simplifiant par v_0 on obtient :

$$R = \left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta} - \sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_c}}{\sqrt{\sin^2\theta} + \sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_c}} \right)^2 = \boxed{\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta}\right)^2}} \right)^2}$$

8. Le phénomène de réflexion totale peut se décrire par une analogie optique, en assimilant le faisceau de neutrons de vitesse v_0 à un rayon lumineux, et la paroi à un milieu transparent d'indice $n < 1$, l'indice de l'air étant supposé égal à 1. Exprimer l'indice n en fonction de v_0 et v_c.
Solution : L'angle de réflexion totale vérifie $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_c) = n \sin(\pi/2) = n$ d'après les lois de Descartes, soit $\cos\theta_c = n$.
De plus, $v_0\theta_c = v_c$ d'après Q5, soit $\theta_c = \arcsin\left(\frac{v_c}{v_0}\right)$. On en déduit :

$$\boxed{n = \cos(\arcsin(\frac{v_c}{v_0})) = \sqrt{1 + \left(\frac{v_c}{v_0}\right)^2}}$$

Probleme 3: Gaz de Van der Waals

On peut raffiner le modèle du gaz parfait en considèrant maintenant le modèle d'un fluide constitué de molécules assimilées à des sphères de rayon r_0 en interactions : l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules est

— attractive,

— ne dépend que de la distance r entre leurs centres

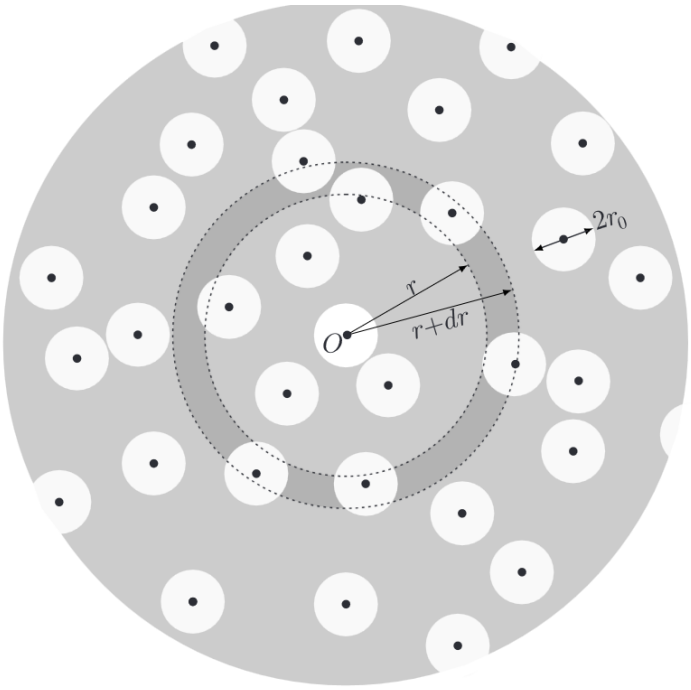
— s'écrit $\epsilon = -\frac{\alpha}{r^6}$ où α est une constante et $r > 2r_0$.

Le volume total occupé par le fluide est V ,la température T et l'énergie cinétique moyenne du gaz sera notée $\overline{E}_C = \frac{Nk_B}{\gamma - 1}T$.

1. Quelle est la nature des interactions décrites ici ? Quel est le signe de α ?
Solution : Il s'agit d'interactions de nature **électrostatiques** entre un dipôle et un dipôle induit. Le champ électrique d'un dipole statique décroit en r^3. Le dipole induit possède un moment dipolaire proportionnel à ce champ.
L'interaction entre les molécules étant attractive, le coefficient α est positif :

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = -6\alpha r^7 \vec{e}_r$$

Pour le calcul de l'interaction entre une molécule donnée de centre O (à l'origine des coordonnées) et le reste du gaz, on admet que les $N-1$ autres molécules sont réparties uniformément en fonction de la distance r avec une densité particulaire uniforme $n^* = N/V$ pour $r > 2r_0$.



2. Quel est le nombre (moyen) dN de molécules dont le centre est situé à une distance de O comprise entre r et $r + \mathrm{dr}$?

Solution : Le volume d'une coquille est donné par :

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{dN} = \mathrm{n}^* \mathrm{dV} = \mathrm{n}^* 4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{dr}}$$

3. En calculant une intégrale, déduire l'énergie potentielle d'interaction moyenne ϵ_1 de la molécule centrée sur O avec toutes les autres. On pourra considérer que $V \gg r_0^3$ pour évaluer les bornes d'intégration.

Solution : L'énergie potentielle d'interaction s'écrit donc comme la somme de toutes les énergies potentielles :

$$\epsilon_1 = \int_{r_0}^{R} \epsilon \times n^* 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

où $\frac{4}{3}\pi R^3 = V$. Avec l'approximation citée, on a $R \to \infty$, ainsi :

$$\epsilon_1 = -\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha}{r^6} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \boxed{-\frac{4\pi n^* \alpha}{3r_0^3}}$$

4. En déduire l'expression de l'énergie interne du fluide se met sous la forme

$$U = \frac{N k_B T}{\gamma - 1} - \frac{N^2 a}{V}$$

dans laquelle on exprimera la constante a en fonction de α et r_0.

Solution : Par définition, l'énergie interne est la somme des énergies microscopiques, on en déduit que :

$$U = \overline{E}_C + \frac{N}{2}\epsilon_1$$

Le coefficient devant l'énergie potentielle d'interaction est $\frac{N}{2}$ puisque l'intégrale calcule l'énergie entre celle du centre et les autres. Il ne faut pas recompter cette énergie potentielle lorsqu'on choisit une autre particule. Ce point étant difficile, la valeur de N reste acceptable.

On en déduit que :

$$U = \frac{N k_B T}{\gamma - 1} - N\frac{4\pi n^* \alpha}{3r_0^3}$$

Avec $n^* = N/V$, il vient

$$\boxed{U = \frac{Nk_BT}{\gamma - 1} - \frac{4\pi\alpha}{3r_0^3}\frac{N^2}{V}} \text{ soit } \boxed{a = \frac{4\pi\alpha}{3r_0^3}}$$

Un modèle un peu plus élaboré de physique statistique permet également d'obtenir l'entropie de la même quantité de fluide, elle s'écrit :

$$S = S_0 + k_B N \ln \frac{T^c(V-u)}{T_0^c(V_0-u)}$$

où l'exposant c ainsi que S_0, T_0, V_0 sont des constantes et $u = N\frac{4}{3}\pi(2r_0)^3$.

5. Justifier physiquement le signe de c.

Solution : L'entropie, en tant que mesure du "désordre" est une fonction croissante de la température, donc $c > 0$, mais la justification rigoureuse m'échappe.

Pour toute évolution infinitésimale d'un système fluide de température T et à la pression P, on indique la relation dU = TdS − PdV entre les variations dU, dS et dV de l'énergie interne, de l'entropie et du volume.

6. En déduire c en fonction de γ ainsi que l'équation d'état $P = P(T, V, N)$ du fluide. Commenter.

Solution : Différentions l'écriture de l'entropie fournie :

$$\mathrm{d}S = k_B N c\frac{\mathrm{d}T}{T} + k_B N \frac{\mathrm{d}V}{V-u}$$

Comme $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$, on obtient grâce à l'expression de l'énergie interne :

$$\frac{Nk_B}{\gamma-1}\mathrm{d}T + \frac{N^2a}{V^2}\mathrm{d}V = k_B N c\mathrm{d}T + k_B NT\frac{\mathrm{d}V}{V-u} - P\mathrm{d}V$$

Par identification $c = \frac{1}{\gamma-1}$ et

$$\frac{N^2a}{V^2}\mathrm{d}V = k_B NT\frac{dV}{V-u} - P\mathrm{d}V \text{ soit } P = \frac{k_B NT}{V-u} - \frac{N^2a}{V^2}$$

Cette expression peut se mettre sous la forme "connue[1]" :

$$\boxed{\left(P + \frac{N^2a}{V^2}\right)(V-u) = nRT}$$

avec $Nk_B = nR$.

1. Mais par des profs en pantalon velours et chemise à carreaux