CB (DS 7)

I. Réaction d'oxydo-réduction

D'après CCS 24

1 - La pile à hydrogène PEMFC

La pile à hydrogène représentée figure 1 est constituée de deux électrodes de platine poreuses, séparées par une membrane polymère permettant le passage des protons H^+, mais pas celui des électrons. Elle fonctionne avec du dihydrogène et du dioxygène gazeux et produit de l'eau sous forme liquide.

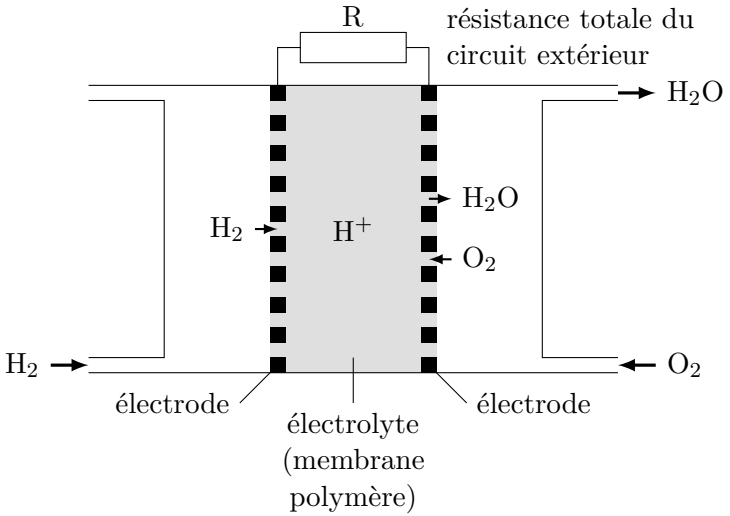


FIGURE 1 – Schéma d'une pile à combustible.

Le bilan réactionnel global de la pile à hydrogène, qui met en jeu les couples redox $H^+/H_{2,(g)}$ et $O_{2,(g)}/H_2O_{(liq)}$ s'écrit :

$$H_{2,(g)} + \frac{1}{2}\,O_{2,(g)} = H_2O_{(liq)}$$

☐ **Q 1 -** Définir les termes « anode » et « cathode ». Écrire les demi-équations électroniques mises en jeu au niveau de chacune des deux électrodes de cette pile.

☐ **Q 2 -** Reproduire le schéma de la pile et y faire apparaitre le nom des électrodes, le sens du courant, le sens de déplacement des protons responsables du passage du courant au sein de l'électrolyte, et celui de déplacement des électrons. Indiquer également le pôle positif et le pôle négatif de la pile.

☐ **Q 3 -** Calculer, à 298 K, l'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ$ et l'entropie standard $\Delta_r S^\circ$ de la réaction. En déduire la valeur de l'enthalpie libre standard de la réaction à 298 K, puis la force électromotrice standard e° de la pile.

Le rendement η d'une pile est relié à l'énergie électrique fournie à l'extérieur, W_e et à la variation d'enthalpie ΔH du système électrochimique selon

$$\eta = -\frac{W_e}{\Delta H}$$

☐ **Q 4 -** Justifier la présence du signe « − » dans l'expression ci-dessus.

☐ **Q 5 -** À pression et température constantes, établir l'inégalité liant la variation d'enthalpie libre ΔG du système et le travail électrique fourni W_e.

Le rendement maximal est obtenu en considérant un fonctionnement isotherme, isobare et réversible de la pile, avec une tension correspondant à la force électromotrice standard e° (les activités de toutes les espèces physico-chimiques en jeu sont donc prises égales à 1).

☐ **Q 6 -** Montrer que le rendement théorique maximal dans les conditions standard peut s'écrire

$$\eta_{max} = 1 - T\frac{\Delta_r S^\circ}{\Delta_r H^\circ}$$

☐ **Q 7 -** Évaluer le rendement théorique maximal de la pile PEMFC à la température de 60°C.

Dans les conditions réelles d'utilisation, la force électromotrice de la pile à hydrogène est inférieure à la valeur théorique en raison de différents phénomènes dissipant de l'énergie : surtension d'activation due au transfert électronique (caractère plus ou moins lent des réactions électrochimiques), surtension due au transport de matière (apport des réactifs jusqu'aux électrodes et départ des produits de réaction) et enfin chute ohmique dans l'électrolyte et dans les divers matériaux conducteurs électroniques.

La figure 2 présente la caractéristique tension - courant (U,j), appelée encore « courbe de polarisation », d'une pile à hydrogène élémentaire. Le point de fonctionnement nominal de cette cellule est tel que $U_n = 0{,}7$ V et $j_n = 0{,}45$ A $\cdot$ cm^{-2}.

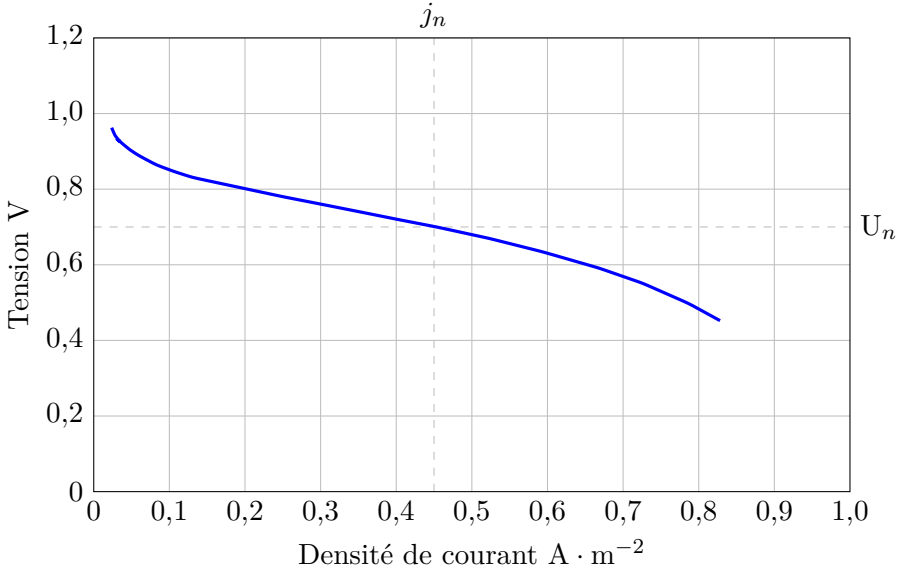


FIGURE 2 – Courbe de polarisation.

Pour le train à hydrogène Coradia iLint, son constructeur annonce une autonomie de 1000 Km à une vitesse moyenne de 100 $km \cdot h^{-1}$. La pile utilisée est un ensemble de piles élémentaires montées en série développant une puissance de 200 kW sous une tension U = 300 V.

☐ **Q 8 -** Combien de cellules doivent-elles être branchées en série ? Quelle doit être la surface des électrodes d'une cellule ?

☐ **Q 9 -** Évaluer le débit molaire en dihydrogène nécessaire au fonctionnement de la pile ainsi que la masse d'hydrogène assurant l'autonomie annoncée par le constructeur.

2 - Stockage

À ce jour, trois types de stockage d'hydrogène peuvent être envisagés :

- le stockage sous forme de gaz comprimé, sous une pression égale à 700 bar et à une température de 298 K, dans des réservoirs composites capables de résister à de fortes pressions ;
- le stockage sous forme liquide, à -253°C sous une pression de 10 bar, ce qui nécessite des réservoirs à l'isolation thermique poussée afin de minimiser l'évaporation ;
- le stockage dans des substrats, sous forme absorbée : l'hydrogène est stocké dans les sites interstitiels du réseau métallique d'un alliage pour former des hydrures non stœchiométriques.

Pour le cas du stockage par adsorption, un substrat possible est l'alliage fer-titane. La réaction d'absorption s'écrit :

$$\mathrm{FeTi}_{(s)} + \frac{n}{2}\mathrm{H}_{2,(g)} = \mathrm{FeTiH}_{n\,(s)}$$

L'alliage FeTi a une structure cubique, de paramètre de maille a, comportant un atome de titane à chaque sommet et un atome de fer au centre du cube.

☐ **Q 10 -** Représenter la maille de FeTi et déterminer le paramètre de maille a, à partir des données.

Seuls les sites octaédriques formés par deux atomes de fer et quatre atomes de titane peuvent être occupés par un atome d'hydrogène.

☐ **Q 11 -** Identifier la position de ces sites interstitiels. En déduire la formule stœchiométrique de l'hydrure contenant le maximum théorique d'atomes d'hydrogène.

☐ **Q 12 -** En réalité, l'absorption maximale d'hydrogène correspond à l'hydrure FeTiH$_{1,9}$. Exprimer puis calculer la capacité volumique d'absorption définie comme la masse d'hydrogène qui peut être insérée dans un mètre cube d'alliage FeTi.

☐ **Q 13 -** Déterminer le volume d'alliage nécessaire pour stocker les 108 kg de dihydrogène permettant d'assurer l'autonomie du Coradia iLint. Comparer ce volume aux deux autres possibilités de stockage et conclure.

Données

Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}314$ J $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ mol^{-1}
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 9{,}65 \times 10^4$ C $\cdot$ mol^{-1}
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Masse volumique de l'alliage FeTi	$\rho_{\mathrm{FeTi}} = 6{,}35 \times 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}
Masse volumique de H_2 liquide à 10,0 *bar*	$\rho_{\mathrm{H_2\,(liq)}} = 70{,}8$ kg $\cdot$ m^{-3}
Enthalpie de combustion massique du gasoil	$\Delta_{\mathrm{comb}}h = 46{,}8$ MJ $\cdot$ kg^{-1}

Enthalpies molaires standard de formation et entropies molaires standard à 298 K :

Espèce	$H_2O_{(liq)}$	$H_{2\,(g)}$	$O_{2\,(g)}$
$\Delta_f H^\circ$ $(kJ \cdot mol^{-1})$	-286	0	0
S_m° $(kJ \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1})$	0,070	0,131	0,205

Masses molaires et rayons atomiques :

Espèce	H	Fe	Ti
Masse molaire $(g \cdot mol^{-1})$	1,00	55,8	47,9
Rayon atomique (pm)	25,0	132	126

II. OEM dans un métal

D'après CCinP 22

Le circuit électrique précédent permet de faire parcourir un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = \mathrm{I}_0 \cos \omega t$ dans une bobine plate enroulée en spirale, schématisée sur la figure 4. Le champ magnétique créé par cette distribution de courant est complexe ; on se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit plus simple : une unique spire circulaire de centre O et de rayon R, parcourue par une intensité $i(t)$. On travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), muni de la base orthonormée directe.

On pose dans le plan de cette spire une poêle, assimilée à un cylindre de rayon $a < \mathrm{R}$ et d'épaisseur $e \ll \mathrm{R}$, de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique σ. On suppose que le champ magnétique B créé par la spire dans la poêle est uniforme. En notant μ_0 la perméabilité magnétique du vide, on donne :

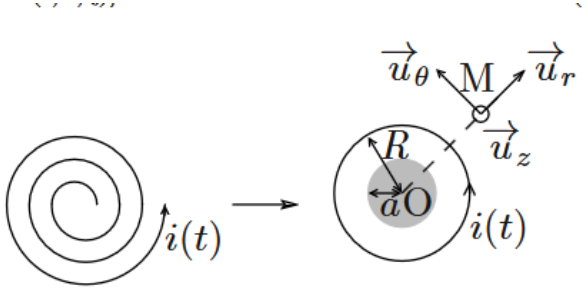


FIGURE 3 – Bobine : schéma et modélisation

$$\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2\mathrm{R}} \vec{e}_z$$

☐ **Q 14 -** Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday. On donne le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{l} = \int\int_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{S}}$$

où S est une surface s'appuyant sur le contour fermé $\mathcal{L}$. Obtenir une formulation globale de l'équation locale de Maxwell-Faraday.

☐ **Q 15 -** Déterminer E(r,t) en fonction de $r, t, \mathrm{R}, \mathrm{I}_0, \omega, \mu_0$ et de μ_r.

☐ **Q 16 -** Exprimer la densité de courant volumique j en tout point de la poêle, puis la puissance volumique moyenne p dissipée par effet Joule en fonction des données.

☐ **Q 17 -** En intégrant cette puissance volumique moyenne sur le volume de la poêle, montrer que la puissance moyenne totale induite s'écrit :

$$\mathrm{P} = \frac{\pi \mu_0^2 \mu_r^2 \sigma \omega^2 \mathrm{I}_0^2 e a^4}{64\mathrm{R}^2}$$

☐ **Q 18 -** On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ?

☐ **Q 19 -** En réalité, le champ électromagnétique variable ne pénètre pas la poêle sur toute son épaisseur, mais uniquement sur une taille typique :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_r \mu_0 \sigma f}}$$

Comment se nomme cet effet ? Calculer numériquement δ en prenant pour la fréquence $f = 10\,\text{kHz}$ Cet effet est-il important pour calculer la puissance induite ?

1 - Influence du nombre de spires

Après avoir mis en œuvre le montage précédent, on relève à l'aide d'une caméra thermique le profil de température dans la poêle en fonte. Notons λ la conductivité thermique, ρ la masse volumique et c la capacité thermique massique de la fonte. Au bout de quelques minutes, le profil de température de la poêle atteint un régime stationnaire. On propose d'interpréter cette observation en se plaçant dans une géométrie simplifiée, cartésienne et unidimensionnelle : on cherche un champ des températures de la forme $\mathrm{T}(x,t)$.

☐ **Q 20 -** En tenant compte de la puissance volumique p due au phénomène d'induction, détailler les étapes permettant d'établir l'équation satisfaite par le champ des températures :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = \frac{p}{\rho c} + \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}$$

☐ **Q 21 -** En déduire l'expression d'un temps typique τ de diffusion thermique en fonction de λ, ρ, c et d'une longueur caractéristique d. Calculer numériquement τ en prendant pour d des dimensions pertinentes. Commenter le résultat obtenu.

L'expérience montre que le profil stationnaire de température dans la poêle est quasiment uniforme ; on note T_p la valeur de la température. On suit expérimentalement la variation de T_p en fonction du nombre de spires n de la bobine, les autres paramètres étant fixés (voir figure ci-dessous). L'évolution $\mathrm{T}_p = f(n)$ est assez bien décrite par une loi affine.

☐ **Q 22 -** Déterminer le nombre N de spires nécessaires pour atteindre une température de 160°C.

Données

- Force électromotrice : $\mathrm{E} = 12\mathrm{V}$
- Inductance propre : $\mathrm{L} = 0.25$ mH
- Capacité : $\mathrm{C} = 68$ nF
- Résistance : $\mathrm{R} = 7.0\Omega$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1}

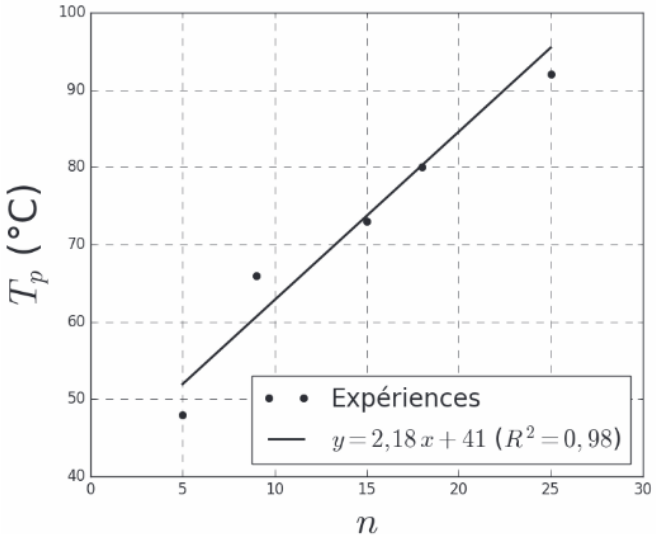


FIGURE 4 – Évolution de la température en fonction du nombre de spires

- Propriétés physiques de la fonte :
  - Perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 80$
  - Conductivité électrique : $\sigma = 1.0 \times 10^6$ S.m^{-1}
  - Conductivité thermique : $\lambda = 50$ W.m^{-1}.K^{-1}
  - Masse volumique : $\rho = 7.0 \times 10^3$ kg.m^{-3}
  - Capacité thermique massique : $c = 5.0 \times 10^2$ J.K^{-1}.kg^{-1}

III. Plasma

D'après CCinP 24

Données numériques

- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F·m^{-1}
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26.10^{-6}$ H·m^{-1}
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4.10^{23}$ J·K^{-1}

En complément du chauffage ohmique, l'utilisation d'ondes électromagnétiques est envisagée. On se place ici dans l'hypothèse d'un plasma dilué non relativiste. On munit l'espace d'une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on suppose qu'une onde électromagnétique plane transversale de champ électrique $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_x(z,t)\,\vec{e}_x + \mathrm{E}_y(z,t)\,\vec{e}_y$ se propage selon $\vec{e}_z$. Du fait du confinement magnétique, on tient compte de la présence d'un champ magnétique stationnaire et uniforme qu'on suppose colinéaire à la direction de propagation : $\vec{\mathrm{B}}_0 = \mathrm{B}_0\,\vec{e}_z$.

☐ **Q 23 -** Écrire les équations de Maxwell. On notera $\vec{j}$ la densité volumique de courant et ρ la densité volumique de charge.

☐ **Q 24 -** Montrer que le caractère transversal de l'onde implique $\rho = 0$.

☐ **Q 25 -** Établir l'équation d'onde sur le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$:

$$\vec{\Delta}\vec{\mathrm{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}$$

où c sera exprimée en fonction de ε_0 et μ_0.

On souhaite maintenant déterminer $\vec{j}$ dans le plasma.

☐ **Q 26 -** Pour quelle raison peut-on faire l'hypothèse que les ions du plasma ont une contribution négligeable devant celle des électrons dans l'expression de $\vec{j}$? Par la suite, on n'envisagera que la contribution des électrons dans l'expression de $\vec{j}$.

On suppose que le champ électrique est une pseudo-onde plane progressive sinusoïdale à laquelle on associe une polarisation circulaire gauche (**figure 9**, qu'on écrit sous forme complexe :

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}}(z,t) = \mathrm{E}_0 \exp\left(i(\omega t - \underline{k}z)\right)\,\vec{e}_x - i\mathrm{E}_0 \exp\left(i(\omega t - \underline{k}z)\right)\,\vec{e}_y$$

avec ω la pulsation et $\underline{k}$ le module d'onde complexe.

On étudie le mouvement d'un électron dans le plan $z = 0$ sous l'effet conjugué du champ électrique $\underline{\vec{\mathrm{E}}}(z,t)$ et du champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}_0$. En régime permanent, sa vitesse a pour expression complexe :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{v_x} \exp(i\omega t)\,\vec{e}_x + \underline{v_y} \exp(i\omega t)\,\vec{e}_y$$

avec $\underline{v_x}$ et $\underline{v_y}$ les amplitudes complexes. On considère que les seules forces s'exerçant sur l'électron sont la force électrique et la force magnétique liée au champ magnétique statique $\vec{\mathrm{B}}_0$. On néglige le poids de l'électron et la force magnétique liée au passage de l'onde.

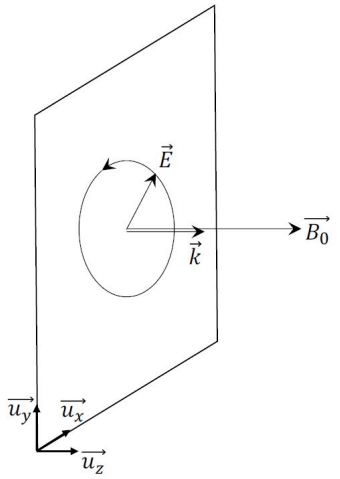


Figure 9 - Onde de polarisation circulaire gauche se propageant parallèlement au champ magnétique $\vec{B_0}$

☐ **Q 27 -** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'électron, montrer que $\underline{v_x}$ et $\underline{v_y}$ vérifient le système :

$$\begin{cases} \underline{v_x} = \frac{i\alpha}{\omega} + \frac{i\omega_c}{\omega}\underline{v_y} \\ \underline{v_y} = \frac{\alpha}{\omega} - \frac{i\omega_c}{\omega}\underline{v_x} \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ la pulsation cyclotron et α à exprimer en fonction de e, m_e et de E_0.

La résolution de ce système d'équations permet d'établir la relation, vraie pour tout z :

$$\underline{\vec{v}} = i\frac{e}{m_e(\omega - \omega_c)}\underline{\vec{E}}$$

☐ **Q 28 -** Lorsque $\omega = \omega_c$, l'onde électromagnétique échauffe le plasma : expliquer pourquoi. On parle alors de chauffage à résonance cyclotronique électronique. Justifier le terme de résonance employé dans cette situation.

☐ **Q 29 -** On note n_0 la densité volumique d'électrons (en m^{-3}) dans le plasma. Établir l'expression de $\underline{\vec{j}}$, puis montrer que la relation de dispersion de cette onde s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ la pulsation plasma.

☐ **Q 30 -** Calculer la pulsation plasma ω_p au sein du tokamak ITER dans lequel $n_0 = 1.10^{20}$ m^{-3}.

Sur la **figure 10**, on a tracé $\frac{\omega^2}{\underline{k}^2}$ en fonction de ω. On a introduit la pulsation $\omega_g = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$.

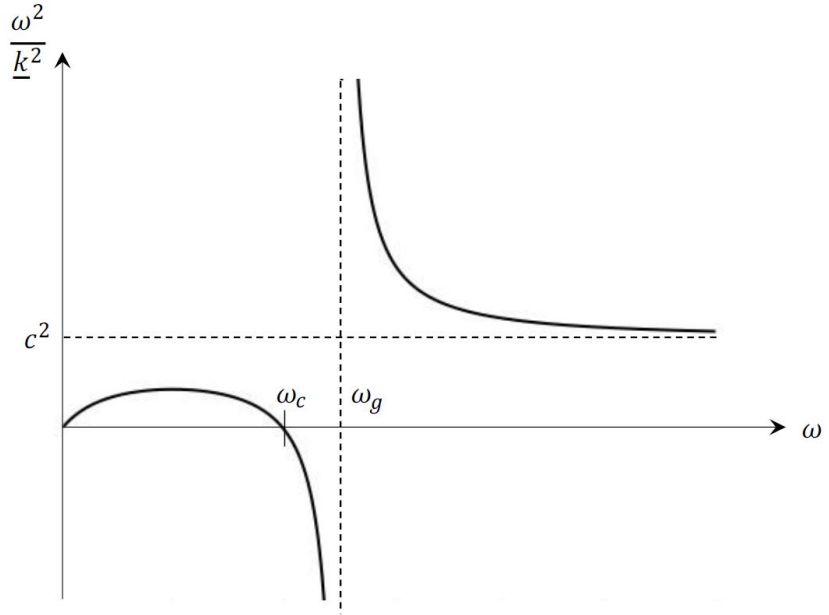


Figure 10 - Relation de dispersion

☐ **Q 31 -** Déterminer, en justifiant votre réponse, pour quel(s) intervalle(s) de pulsations l'onde peut se propager dans le plasma.

☐ **Q 32 -** Déterminer la vitesse de phase de l'onde pour $\omega = \omega_c$. Interpréter.

IV. Lois de Kepler et unité astronomique

D'après Mines 24

1 - Planète autour S d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_0)$, le mouvement d'un astre P assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur A de masse m_A et de centre fixe A. On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ et $||\vec{r}|| = r$

☐ **Q 33 -** Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ? Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par A sur P

si les deux astres sont assimilés à des points ?

☐ **Q 34 -** Que devient l'expression de $\vec{F}$ si P reste ponctuel tandis que l'astre A , de rayon $R_A < r$, possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.

☐ **Q 35 -** Cette expression reste-t-elle encore applicable si P et A sont tous deux à symétrie sphérique ? On pourra, dans tout ce qui suit, considérer A et P comme des points matériels A et P.

☐ **Q 36 -** Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy).

On note $\vec{v}$ la vitesse de P et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P. $\vec{v}$ est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ.

☐ **Q 37 -** Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta) = C\frac{\vec{e}_\theta + \vec{e}}{p}$ où $\vec{e}$ est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation $\mathcal{G}$. Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e\,\vec{e}_y$ avec $e \geqslant 0$.

☐ **Q 38 -** Exprimer $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ. En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné. Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T.

☐ **Q 39 -** En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T = \mathcal{I}p^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}m_A}$ où la constante $\mathcal{I}$ s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$.

☐ **Q 40 -** Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des lois de Kepler, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique »sous forme d'une phrase en français. Le calcul de l'intégrale I en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

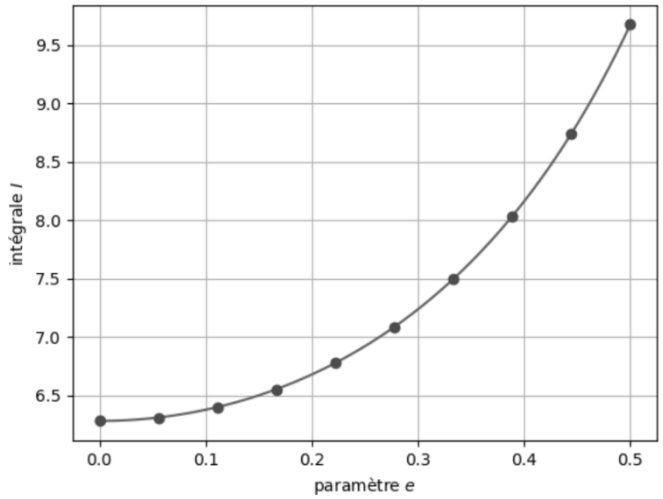


FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale $\mathcal{I}$

☐ **Q 41 -** Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leqslant e \leqslant 1/2$.

2 - Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de Copernic, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1 , de périodes T_0 et T_1. Le principe de la mesure de a_0 proposée par Cassini, à la fin du XVII^e siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7070\,\mathrm{km}$) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance minimale de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris - Mars et Cayenne - Mars).

☐ **Q 42 -** Sans soucis d'échelle, représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0 ,a_1, α et ℓ ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).

☐ **Q 43 -** En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0, T_1, ℓ et α.

☐ **Q 44 -** La valeur annoncée par Cassini était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci–dessus ?

3 - L'énergie gravitationnelle

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur fournit à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4).

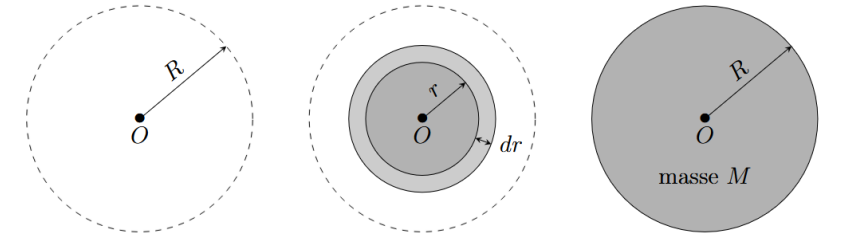


FIGURE 4 – Constitution progressive de l'étoile

Ce calcul sera effectué pour une évolution quasi–statique, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

☐ **Q 45 -** Donner et justifier physiquement le signe de W_g. Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = -W_g$ l'énergie de liaison de l'étoile.

☐ **Q 46 -** Exprimer la masse volumique ρ, supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R. En déduire, en fonction de M, R et r, les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de dm (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à $r + \mathrm{d}r$).

☐ **Q 47 -** Justifier que la contribution $\mathrm{d}W_g$ à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à $r + \mathrm{d}r$) s'écrit $\mathrm{d}W_g = -\frac{\mathcal{G}m\mathrm{d}m}{r}$. Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de $\mathcal{G}$, M et R.

Données numériques

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de Planck	$h = 6{,}63{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}Hz^{-1}}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1\,\mathrm{UA} = 1{,}50{\cdot}10^{11}\,\mathrm{m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11{\cdot}10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}67{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1{,}99{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6{,}96{\cdot}10^{8}\,\mathrm{m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6{,}37{\cdot}10^{6}\,\mathrm{m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365\,\mathrm{j} = 3{,}16{\cdot}10^{7}\,\mathrm{s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687\,\mathrm{j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4{,}85\,\mu\mathrm{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1{,}6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Syntaxes Python

Syntaxe d'appel	Résultats ou commentaires
⋆ **Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a\,,\,b]$:**	
`r = numpy.linspace(a, b, n)`	`r` est un tableau de type `numpy.array`
⋆ **Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique**	
`r = scipy.integrate.quad(f, a, b)`	`r = (y, err)`
⋆ **Créer ou activer une fenêtre de tracé :**	
`r = matplotlib.pyplot.figure()`	exécuter *avant* de générer des tracés
⋆ **Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$**	
`matplotlib.pyplot.plot(x, y)`	`x` et `y`, énumérables de même dimension
⋆ **Afficher la ou les fenêtres de tracé :**	
`matplotlib.pyplot.show()`	exécuter *après* avoir généré des tracés

I. Réaction d'oxydo-réduction

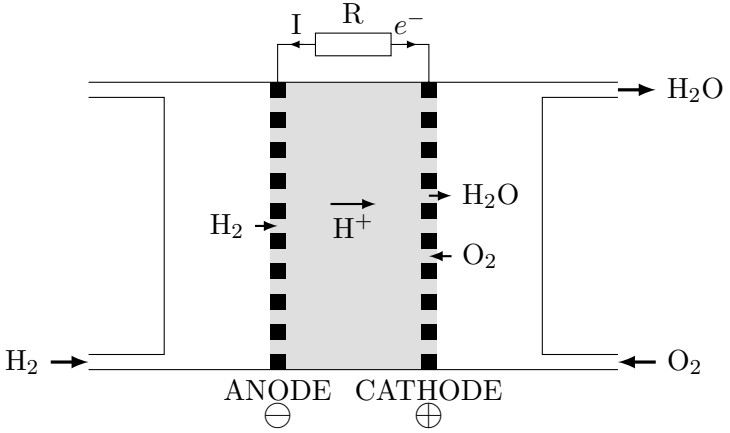
☐ **Q 1 -** L'**anode** est le lieu où se passe l'**oxydation** ; la **cathode** est le lieu où se passe la **réduction**. À l'anode, le dihydrogène est oxydé en eau :

$$H_{2\,(g)} \longrightarrow 2\,H^+ + 2\,e^-$$

À la cathode, le dioxygène est réduit en eau :

$$\frac{1}{2}O_{2\,(g)} + 2\,H^+ + 2\,e^- \longrightarrow H_2O_{(l)}$$

☐ **Q 2 -** Les électrons sont produits du côté du dihydrogène, et vont donc vers l'électrode de droite. Le courant est en sens inverse. Les ions H^+ vont de l'anode à la cathode. D'après le sens des électrons, la borne $\oplus$ est la cathode, la borne $\ominus$ l'anode.



☐ **Q 3 -** D'après la loi de Hess :

$$\boxed{\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ H_2O_{(l)} - \Delta_f H^\circ H_{2\,(g)} - \frac{1}{2}\Delta_f H^\circ O_{2\,(g)} = -286\ kJ \cdot mol^{-1}}$$

De même :

$$\boxed{\Delta_r S^\circ = S^\circ_m H_2O_{(l)} - S^\circ_m H_{2\,(g)} - \frac{1}{2}S^\circ_m O_{2\,(g)} = -0{,}163\ kJ \cdot mol^{-1}K}$$

d'où :

$$\boxed{\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ = -237\ kJ \cdot mol^{-1}}$$

Or $\Delta_r G^\circ = -n\mathcal{F}e^\circ$, où $n = 2$ est le nombre d'électrons échangés pour un avancement de 1 soit :

$$\boxed{e^\circ = \frac{-\Delta_r G^\circ}{2\mathcal{F}} = 1{,}23\ \underline{V}}$$

Ce qui est conforme au résultat habituel.

☐ **Q 4 -** L'énergie est fournie par la pile donc définie négativement du point de vue de ce système.

☐ **Q 5 -** Par définition, pour une transformation à pression et température constante, la variation d'enthalpie libre du système constituant la pile vaut :

$$\Delta G = \Delta H - T_0\Delta S$$

Or l'application du premier principe donne, avec $W_p = -P_0\Delta V$:

$$\Delta U = W_P + W_e + Q \quad \text{soit} \quad \Delta H = W_e + Q$$

De plus, l'application du second principe donne, avec $\mathcal{S}_{ech} = Q/T_0 = 0$ en considérant la transformation de la pile adiabatique :

$$\Delta S = \mathcal{S}_{ech} + Scre \quad \text{soit} \quad \Delta S < 0$$

On en déduit que :

$$\Delta G = W_e - T_0\Delta S \quad \text{soit} \quad \Delta G \geqslant W_e$$

☐ **Q 6 -** Pour un fonctionnement réversible et adiabatique : $\Delta S = 0$, on en déduit que $\Delta G = W_e$. Pour une évolution de n moles de matière :

$$\eta = \frac{-W_e}{\Delta H} = -\frac{-n\Delta_r G^\circ}{n\Delta_r H^\circ} = \frac{\Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ}{\Delta_r H^\circ}$$

On a établi que :

$$\boxed{\eta = 1 - T\frac{\Delta_r S^\circ}{\Delta_r H^\circ}}$$

☐ **Q 7 -** À 60°C, on trouve :

$$\boxed{\eta = 0{,}81}$$

J.B

☐ **Q 8 -** Il faut brancher $\mathrm{U}/\mathrm{U}_n = 429$ cellules en série. La surface des électrodes doit être :

$$\boxed{\mathrm{S} = \frac{\mathrm{I}}{j} = \frac{\mathcal{P}}{\mathrm{U}j} = 1{,}5 \times 10^3\ cm^2 = 0{,}15\ m^2 \text{ par cellule}}$$

soit une surface de 63 m^2 au total pour l'ensemble de la pile à combustible.

☐ **Q 9 -** Pour un atome d'hydrogène, on fournit deux électrons. Or le débit d'électrons est $\mathrm{I}/\mathcal{F}$. Donc le débit de dihydrogène pour une cellule est :

$$\frac{\mathrm{I}}{2\mathcal{F}} = 3{,}45 \times 10^{-3}\ \mathrm{mol \cdot \underline{s}^{-1}}$$

Soit au total :

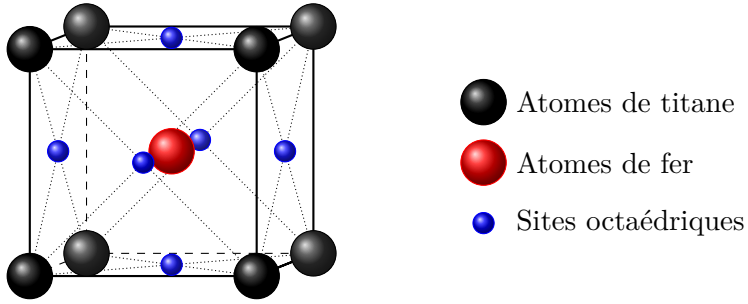
$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}_n}\frac{\mathcal{P}}{2\mathrm{U}\mathcal{F}}$$

Le débit molaire d'hydrogène pour l'ensemble de la pile est :

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}}{2\mathrm{U}_n\mathcal{F}} = 1{,}48\ \mathrm{mol \cdot s^{-1}}}$$

Pour effectuer 1000 km, il faut 10 h soit une quantité de matière de dihydrogène égale à $53{,}3 \times 10^3$ mol soit une masse de dihydrogène égale à $\boxed{107\ \mathrm{kg}}$.

☐ **Q 10 -** Schéma de la maille : les atomes de titane sont situés sur les sommets, l'atome de fer au centre d'un cube de côté a.



Il y a deux méthodes :

- On utilise les rayons métalliques. Si les atomes de fer sont jointifs alors $a = 2\mathrm{R}_{\mathrm{F}e} = 264$ pm, si les atomes de titane sont jointifs alors $a = 2\mathrm{R}_{\mathrm{T}i} =$ 252 pm, si le contact se fait sur la diagonale du cube entre fer et titane alors :

$$a\sqrt{3} = \mathrm{R}_{\mathrm{T}i} + 2\mathrm{R}_{\mathrm{F}e} + \mathrm{R}_{\mathrm{T}i} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{R}_{\mathrm{T}i} + \mathrm{R}_{\mathrm{F}e} = 298\ \mathrm{pm}}$$

On retient cette valeur car c'est la plus grande (la seule qui permet la non-pénétration des nuages électroniques).

- On utilise la donnée de la masse volumique. La maille est composée d'un atome de fer et de $8 \times \frac{1}{8} = 1$ atome de titane donc :

$$\rho = \frac{\mathrm{MT}i + \mathrm{MF}e}{\mathcal{N}_a a^3} \quad \text{soit} \quad a = \frac{\mathrm{MT}i + \mathrm{MF}e}{\rho\mathcal{N}_a}^{1/3} = 3{,}00 \times 10^{-10}\ m = 300\ \mathrm{pm}$$

Les résultats coïncident.

☐ **Q 11 -** Les sites octaédriques sont situés au centre de chacune des faces (l'octaèdre est défini par les quatres atomes de titane d'une face, l'atome de fer central et l'atome de fer de la maille adjacente). Il y a $6 \times \frac{1}{2} = 3$ sites intersticiels par maille. Il y a également un atome de fer et de un atome de titane donc la formule stoechiométrique de l'hydrure contenant le maximum d'hydrogène est :

$$\boxed{\mathrm{F}e\mathrm{T}i\mathrm{H}_3}$$

☐ **Q 12 -** On peut donc absorber 1,9 atomes d'hydrogène par maille. La masse d'un atome d'hydrogène est $\mathrm{M_H}/\mathcal{N}_\mathrm{A}$ donc la capacité d'absorption volumique est donc :

$$\boxed{\frac{1{,}9\mathrm{M_H}}{\mathcal{N}_\mathrm{A} a^3} = 119\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$$

☐ **Q 13 -** Il faut alors $108/119 = 0{,}9\ m^3$ pour stocker l'hydrogène. Sous forme comprimée, en supposant le gaz parfait, il faut :

$$\mathrm{V_{gaz\ comprimé}} = \frac{m\mathrm{RT}}{\mathrm{M_{H_2}P}} = 1{,}9\ m^3$$

Sous forme liquide, il faut :

$$\mathrm{V_{liquide}} = \frac{m}{\rho_{\mathrm{H_2},\ell}} = 1{,}5\ m^3$$

Le stockage par adsorption est le plus compact.

II. OEM dans un métal

☐ **Q 14 -** L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{E}} = -\frac{\partial \vec{\text{B}}}{\partial t}$$

L'utilisation du théorème de Stokes donne la loi de Faraday :

$$\oint \vec{\text{E}} \cdot \vec{\text{d}\ell} = -\frac{\text{d}}{\text{d}t}\Phi(\vec{\text{B}})$$

☐ **Q 15 -** Le champ $\vec{\text{B}}$ est invariant par rotation selon θ, donc l'amplitude du champ $\vec{\text{E}}$ ne dépend pas de cette coordonnée. Le plan $(\text{M}, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour le champ $\vec{\text{B}}$ donc $\vec{\text{E}}$ est porté par $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{\text{E}}(\text{M},t) = \text{E}_\theta(r,z,t)\,\vec{e}_\theta$$

Prenons un contour de rayon r, la loi de Faraday donne :

$$2\pi r \text{E}_\theta = -\pi r^2 \frac{\mu_0\mu_r}{2\text{R}}\frac{\text{d}i}{\text{d}t}$$

Ainsi :

$$\text{E}_\theta(r,0<z<e,t) = \frac{\mu_0\mu_r\omega \text{I}_0}{2\text{R}}\frac{r}{2}\sin\omega t$$

☐ **Q 16 -** En utilisant la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma\vec{\text{E}} = \frac{\mu_0\mu_r\omega \text{I}_0}{2\text{R}}\frac{r}{2}\sin\omega t\,\vec{e}_\theta$$

La puissance moyenne vaut alors, avec $<\sin\omega t^2>=1/2$:

$$<\mathcal{P}_{vol}>=<\vec{j}\cdot\vec{\text{E}}>=\sigma<\text{E}^2>=\sigma\frac{\mu_0^2\mu_r^2\omega^2\text{I}_0^2}{32\text{R}}r^2$$

☐ **Q 17 -** Pour un élément de volume cylindrique : $\text{d}\mathcal{V} = r\text{d}\theta\text{d}r\text{d}z$, la puissance totale s'écrit alors :

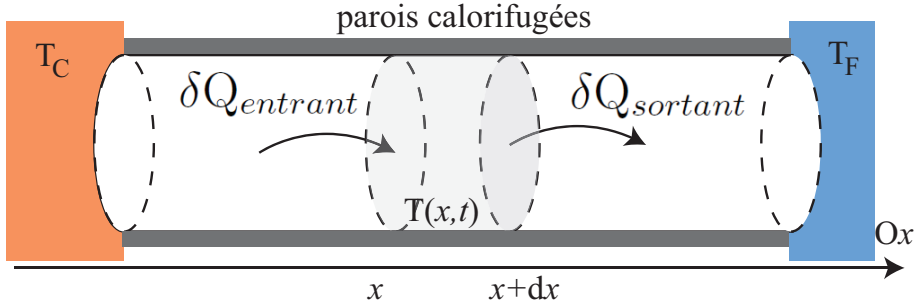
$$<\mathcal{P}_{vol}>=\int_{r=0}^{\text{R}}\int_{z=0}^{e}\int_{\theta=0}^{2\pi}<\vec{j}\cdot\vec{\text{E}}>r\text{d}\theta\text{d}r\text{d}z=\sigma<\text{E}^2>=\sigma\frac{\mu_0^2\mu_r^2\omega^2\text{I}_0^2 e}{32\text{R}}2\pi[\frac{r^4}{4}]_0^a$$

$$<\mathcal{P}_{vol}>=\sigma\frac{\mu_0^2\mu_r^2\omega^2\text{I}_0^2 e}{64\text{R}}\pi a^4$$

☐ **Q 18 -** La fonte possède des propriétés magnétiques, c'est à dire un coefficient μ_r beaucoup plus important que l'aluminium.

☐ **Q 19 -** Il s'agit de l'effet de peau, $\delta \approx 0{,}6\,\text{mm}$. L'épaisseur de peau est inférieure à celle de la casserole, il faudrait modifier le calcul précédent pour tenir compte de cet effet.

☐ **Q 20 -** Appliquons le premier principe à pression constante à une tranche de largeur $\text{d}x$ pendant un intervalle de temps $\text{d}t$.



La température de cette tranche évolue, il vient :

$$\text{H}(x,t+\text{d}t)-\text{H}(x,t)=\delta\text{Q}_{entrant}-\delta\text{Q}_{sortant}+\delta\text{Q}_{produit}$$

$$\rho c_p \text{Sd}x(\text{T}(x,t+\text{d}t)-\text{T}(x,t)) = j(x,t)\text{S}\text{d}t - j(x+\text{d}x,t)\text{S}\text{d}t + p\text{S}\text{d}x\text{d}t$$

On obtient après division par $\text{Sd}x\times\text{d}t$:

$$\rho c_\text{P}\frac{\partial \text{T}}{\partial t} = -\underbrace{\frac{j(x+\text{d}x,t)-j(x,t)}{\text{d}x}}_{\frac{\partial j}{\partial x}} + p$$

En utilisant la loi de Fourier $j=-\lambda\dfrac{\partial \text{T}}{\partial x}$, on obtient l'équation voulue

☐ **Q 21 -** L'équation de diffusion thermique fait apparaître la diffusivité thermique telle que :

$$\frac{\lambda}{\rho c} = \frac{d^2}{\tau} \quad \text{soit} \quad \tau = \frac{d^2\rho c}{\lambda}$$

Pour $d = 1\,\text{cm}$, on obtient : $\tau \sim 7\,\text{s}$. Le régime permanent est atteint très rapidement dans la poele.

☐ **Q 22 -** En prolongeant le graphique, ou en utilisant la régression, on obtient : $\text{N} \sim 55$.

III. Plasma

☐ **Q 23 -** Équations de Maxwell :

$$\text{div}\vec{\text{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ Maxwell-Gauss}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\text{E}} = -\frac{\partial \vec{\text{B}}}{\partial t} \text{ Maxwell-Faraday}$$

$$\text{div}\vec{\text{B}} = 0 \text{ Maxwell-flux}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\text{B}} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{\text{E}}}{\partial t} \text{ Maxwell-Ampère}$$

☐ **Q 24 -** On calcule la divergence de $\vec{\text{E}}$. Comme l'onde est tranverse, $\text{E}_z = 0$ et comme l'onde est plane, E_x et E_y ne dépendent que de z. Ainsi, $\text{div}\vec{\text{E}} = 0$ donc $\rho = 0$.

☐ **Q 25 -** On applique la formule du double rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\text{E}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{\text{E}}) - \vec{\Delta}\vec{\text{E}}$
D'après ce qui précède, $\text{div}\vec{\text{E}} = 0$ puis on utilise successivement Maxwell-Faraday puis Maxwell-Ampère pour obtenir

$$\vec{\Delta}\vec{\text{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\text{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \textbf{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

☐ **Q 26 -** La masse des ions du plasma est beaucoup plus importante que celle des électrons (au moins d'un facteur 1000), donc à excitation (force électrique) égale, leur vitesse sera nettement plus faible, donc leur contribution à $\vec{j}$ sera négligeable (à charge et densité équivalentes).

☐ **Q 27 -** On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron, soumis à 2 forces : la force électrique et la force magnétique :

$$m_e\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = -e\vec{\text{E}} - e\vec{v}\wedge\vec{\text{B}}$$

On projette et on obtient le système suivant (en complexes) :

$$\begin{cases} m_e i\omega\underline{v_x} = -e\text{E}_0 - e\underline{v_y}\text{B}_0 \\ m_e i\omega\underline{v_y} = +ie\text{E}_0 + e\underline{v_x}\text{B}_0 \end{cases}$$

En divisant par $m_e i\omega$, on obtient bien

$$\begin{cases} \underline{v_x} = \frac{i\alpha}{\omega} + \frac{i\omega_c}{\omega}\underline{v_y} \\ \underline{v_y} = \frac{\alpha}{\omega} - \frac{i\omega_c}{\omega}\underline{v_x} \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{e\text{B}_0}{m_e}$ et $\alpha = \frac{e\text{E}_0}{m}$.

☐ **Q 28 -** Pour $\omega = \omega_c$, la norme de la vitesse devient infiniment grande : c'est la définition d'une résonance. On peut imaginer qu'il se produit alors de nombreuses collisions qi échauffent le plasma (collisions qui ont été négligées jusqu'à présent dans le modèle, ce qui conduit à cette divergence).

☐ **Q 29 -** La densité volumique de courant $\vec{j}$ est le produit de la densité volumique de charge libre, qui vaut ici $n_0.(-e)$, par la vitesse de ces charges, donc $\vec{v}$, soit $\vec{\underline{j}} = -n_0 e\vec{\underline{v}}$.

$$\vec{\underline{j}} = -n_0 e i\frac{e}{m_e(\omega-\omega_c)}\vec{\underline{\text{E}}}$$

On remplace alors dans l'équation de propagation et on en déduit la relation de dispersion :

$$(-i\underline{k})^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 = \mu_0 i\omega\frac{-in_0e^2}{m_e(\omega-\omega_c)} \Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\omega n_0 e^2}{m_e(\omega-\omega_c)}$$

En posant $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0e^2}{m_e\varepsilon_0}}$, on trouve bien $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}\right)$.

☐ **Q 30 -** $\omega_p \approx 5{,}6.10^{11}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{S}$

☐ **Q 31 -** Pour que l'onde puisse se propager dans le plasma, il faut que $\underline{k}$ soit réel et non imaginaire pur, donc que $\underline{k}^2 > 0$ soit $\frac{\omega^2}{\underline{k}^2} > 0$. C'est donc possible pour $\omega < \omega_c$ **ou** $\omega > \omega_g$.

☐ **Q 32 -** Par définition, $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ (lorsque k est réel). Pour $\omega \to \omega_c$, on a $v_\varphi \to 0$: l'onde ne se propage pas.

IV. Lois de Kepler et unité astronomique

☐ **Q 33 -** La condition forte permettant de considérer A fixe est :

$$m_\mathrm{A} \gg m_\mathrm{P}$$

Si les deux astres sont assimilés à deux points matériels, alors la force qu'applique A sur P est :

$$\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{G}\frac{m_\mathrm{A} m_\mathrm{P}}{r^2}\vec{u_r}$$

☐ **Q 34 -** Si l'astre A possède une répartition de masse à symétrie sphérique, le champ gravitationnel créé par cette répartition en un point P tel que $\mathrm{AP} = r > \mathrm{R_A}$ est celui que créerait un point matériel, de masse m_A placé au centre de la sphère. Ainsi, l'expression de la force reste inchangée :

$$\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{G}\frac{m_\mathrm{A} m_\mathrm{P}}{r^2}\vec{u_r}$$

Pour démontrer ce résultat, on applique le théorème de Gauss de la gravitation :

$$\oint \vec{\mathrm{G}} \cdot d\vec{\mathrm{S}} = -4\pi \mathrm{G M_{int}}$$

En considérant A comme origine du repère et en utilisant les symétries :

$$\vec{\mathrm{G}}(r > \mathrm{R_A}) = -\mathrm{G}\frac{m_\mathrm{A}}{r^2}\vec{u_r}$$

☐ **Q 35 -** L'expression de cette force reste valable si P et A sont à symétrie sphérique. En effet, si le champ de pesanteur crée par A est assimilé à celui d'un point matériel, la 3e loi de Newton assure le même comportement pour P.

☐ **Q 36 -** Appliquons le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen $\mathrm{R_0}$:

$$\left.\frac{d\vec{\mathrm{L}}_\mathrm{A}}{dt}\right|_{\mathrm{R_0}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \wedge \vec{\mathrm{F}} = r\vec{u_r} \wedge \mathrm{F}\vec{u_r} = \vec{0}$$

Ainsi, le moment cinétique est constant :

$$\vec{\mathrm{L}}_\mathrm{A} = m_\mathrm{P}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \wedge \vec{v}(\mathrm{P/R_0}) = \mathrm{Cte}$$

En coordonnée polaires (r, θ), le moment cinétique s'écrit :

$$\mathrm{L_A} = m_\mathrm{P} r^2 \dot{\theta}$$

☐ **Q 37 -** En appliquant la dynamique de Newton :

$$m_\mathrm{P}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{G}\frac{m_\mathrm{A} m_\mathrm{P}}{r^2}\,\vec{e}_r = -\mathrm{G}\frac{m_\mathrm{A} m_\mathrm{P}}{r^2\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r$$

Soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\vec{e}_r}$$

Or on sait que $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$, soit en simplifiant par $\mathrm{d}t$: $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{e}_r$.
On a simplement à intégrer la relation précédente par rapport à θ :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}(\theta) = \boxed{\frac{\mathrm{C}}{p}(\vec{e}_\theta + \vec{e})}$$

avec $\vec{e}$ un vecteur constant et $\boxed{p = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}}$.

☐ **Q 38 -** On sait que $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, et d'autre part $\vec{v} = \frac{\mathrm{C}}{p}(\vec{e}_\theta + e\cos\theta\,\vec{e}_\theta + e\sin\theta\,\vec{e}_r)$

Par identification, on a alors : $\boxed{\dot{r} = \frac{\mathrm{C}}{p}e\sin\theta}$ et $\boxed{r\dot{\theta} = \frac{\mathrm{C}}{p}(1 + e\cos\theta)}$. On déduit de cette dernière équation l'équation polaire de la trajectoire :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

Pour un mouvement borné, $e < 1$ - sinon r diverge - donc la trajectoire est elliptique.

☐ **Q 39 -** Il suffit d'isoler l'élément différentiel $\mathrm{d}t$ dans l'équation précédente, puis d'intégrer sur une révolution.

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{C}}{p}(1+e\cos\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}{\mathrm{C}}(1+e\cos\theta) = \frac{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}{r^3\dot{\theta}}(1+e\cos\theta)$$

Soit : $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}{p^3}(1+e\cos\theta)^4\right)^{1/2}$ ie :

$$\mathrm{d}t = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

La période T du mouvement est donnée par intégration de la relation infinitésimale précédente entre 0 et 2π :

$$\mathrm{T} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}}\mathrm{I}, \quad \text{où} \quad \boxed{\mathrm{I} = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$$

La période T du mouvement est donnée par :

$$\mathrm{T} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}}\mathrm{I}, \quad \text{où} \quad \mathrm{I} = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

☐ **Q 40 -** Dans le cas circulaire ($e = 0$), la troisième loi de Kepler s'écrit :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{p^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}m_\mathrm{A}}$$

☐ **Q 41 -** Le tracé de l'intégrale se fait en Python :

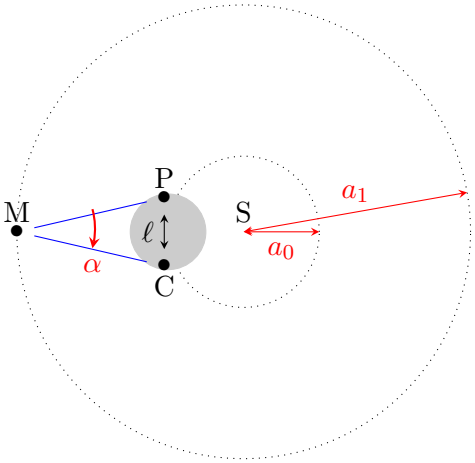
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

def f(theta, e):
    return 1 / (1 + e * np.cos(theta))**2

e_valeurs = np.linspace(0, 0.5, 10)
integral_values = [quad(f, 0, 2*np.pi, args=(e,))[0] for e in e_valeurs]
plt.plot(e_valeurs, integral_values, 'o-')
plt.xlabel('Paramètre e')
plt.ylabel('Intégrale I')
plt.grid(True)
plt.show()
```

1 - Mesure de l'unité astronomique

☐ **Q 42 -**



☐ **Q 43 -** Dans le triangle isocèle PMC :

$$(a_1 - a_0)\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\ell}{2}$$

Soit dans l'approximation des petits angles :

$$\alpha = \frac{\ell}{a_1 - a_0}$$

☐ **Q 44 -** En utilisant les données, il faut récupérer la valeur de a_1 avec la loi de Kepler :

$$\frac{\mathrm{T}_1^2}{a_1^3} = \frac{\mathrm{T}_0^2}{a_0^3} \quad \text{soit} \quad a_1 = a_0(\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0)^{2/3}$$

On en déduit que

$$\frac{\ell}{a_1 - a_0} = \frac{\ell}{a_0}\frac{1}{(\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0)^{2/3} - 1} = \frac{7070\cdot 10^3}{1{,}5\cdot 10^{11}}\frac{1}{1-(365/687)^{2/3}} = 90{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{rad} = 18''$$

On est pas si loin... Avec la formule exagérée de l'énoncé on est plus proche :

$$\left(\frac{687}{365}\right)^{2/3} \approx 1{,}5 \neq 1{,}6$$

2 - L'énergie gravitationnelle

☐ **Q 45 -** L'énergie gravitationnelle W_g est négative car elle correspond à une interaction attractive. L'énergie de liaison, correspond à l'énergie qu'il faut fournir à un système pour le dissocier.

☐ **Q 46 -** La masse volumique est donnée par :

$$\rho = \frac{3\mathrm{M}}{4\pi\mathrm{R}^3}$$

On obtient alors :

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{et} \quad \mathrm{d}m = 4\pi r^2 \mathrm{d}r\rho$$

☐ **Q 47 -** L'énergie gravitationnelle est obtenue par intégration :

$$\mathrm{W}_g = -\int_0^{\mathrm{R}} \frac{\mathcal{G}m\mathrm{d}m}{r} = -\mathcal{G}\frac{3\mathrm{M}^2}{\mathrm{R}^6}\int_0^4 r^4\mathrm{d}r = -\frac{3}{5}\frac{\mathrm{GM}^2}{\mathrm{R}}$$