

DS 6

- Pour un objectif **CCinP**, vous traiterez les questions 1 à 52. (sujet officiel complet)
- Pour un objectif **Centrale-Mines**, vous traiterez les questions 21 à 73.

En cas de panique, vous pouvez évidemment répondre aux questions 1 à 20. En revanche, toute réponse apportée aux questions 1 à 20 entraîne la nullité des réponses 52 à 73.

D'après e3AMP24

I. Quelques aspects de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière.

Les notations et valeurs numériques des grandeurs utilisées dans ce problème sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des O.E.M dans le vide	c	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	ε_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	m_e	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

On note j le nombre complexe de partie imaginaire positive vérifiant $j^2 = -1$. En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , on convient d'associer à toute grandeur sinusoïdale $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi_a)$ deux grandeurs complexes :

- la première, notée $\underline{A} = Ae^{j\varphi_a}$, appelée amplitude complexe associée à a ;
- la seconde, notée $\underline{a}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi_a)} = \underline{A}e^{j\omega t}$, appelée grandeur sinusoïdale complexe associée à a .

Dans le cas où la grandeur sinusoïdale est un champ $a(\underline{M}, t) = A \cos[\omega t + f(\underline{M}) + \varphi_a]$, dépendant de la date t et de la position \underline{OM} d'un point \underline{M} via une fonction f nulle lorsque \underline{M} est confondu avec \underline{O} , on note $a(\underline{M}, t) = \underline{A}e^{j[\omega t + f(\underline{M})]}$ la grandeur sinusoïdale complexe associée à a . À l'exception de j , les grandeurs complexes sont soulignées.

Les différentes parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres. Néanmoins, des notions et notations utiles sont introduites au fil du sujet. Aussi est-il conseillé de lire et de résoudre les parties du problème dans l'ordre de présentation.

1 - Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, milieu supposé n'avoir ni charge ni courant. On introduit un repère cartésien orthonormé direct $(\underline{O}, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Un point \underline{M} quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

□ **Q 1** - Citer les quatre équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} dans ce milieu.

On rappelle que $\text{rot}(\text{rot} \vec{\sigma}) = \text{grad}(\text{div} \vec{\sigma}) - \Delta \vec{\sigma}$, où $\vec{\sigma}$ est un champ vectoriel et Δ est l'opérateur laplacien vectoriel.

□ **Q 2** - Obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique \vec{E} . En déduire la relation entre c, ε_0 et μ_0 .

On considère une onde électromagnétique solution de l'équation de d'Alembert de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde k et de pulsation temporelle ω . On suppose qu'elle se propage dans la direction et le sens de \underline{e}_z .

□ **Q 3** - Montrer que les champs électrique et magnétique de l'onde sont transverses à l'aide de la notation complexe.

On suppose le champ électrique \vec{E} de l'onde polarisé rectilignement selon \underline{e}_x . On note E_0 son amplitude et φ sa phase à l'origine du temps et de l'espace.

□ **Q 4** - Donner l'expression du champ électrique réel de l'onde en un point \underline{M} à l'instant de date t , noté $\vec{E}(\underline{M}, t)$. On fera notamment apparaître E_0, ω et k .

□ **Q 5** - Établir la relation entre k et ω , appelée relation de dispersion.

□ **Q 6** - Obtenir l'expression du champ magnétique réel de l'onde en un point \underline{M} à l'instant de date t , noté $\vec{B}(\underline{M}, t)$.

□ **Q 7** - Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde en un point \underline{M} à l'instant

de date t , noté $\vec{\Pi}(M,t)$.

□ **Q 8** - Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point M à l'instant de date t , notée $w(M,t)$, en fonction de E_0 , ω , k , ε_0 , t et de z .

□ **Q 9** - On note T la période temporelle de l'onde plane progressive monochromatique. Montrer que les valeurs moyennes temporelles de $\vec{\Pi}$ et de w vérifient $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = c \langle w \rangle_T \vec{e}_z = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z$.

2 - Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

On s'intéresse à l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr. Dans ce modèle, le proton est supposé immobile et placé à l'origine O du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'électron est soumis au champ électrique coulombien du proton et on néglige l'effet de son poids. Le moment cinétique \vec{L}_O de l'électron par rapport à O est quantifié : $\|\vec{L}_O\| = n \frac{h}{2\pi}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

□ **Q 10** - Montrer que \vec{L}_O est constant. En déduire que le mouvement de l'électron est plan.

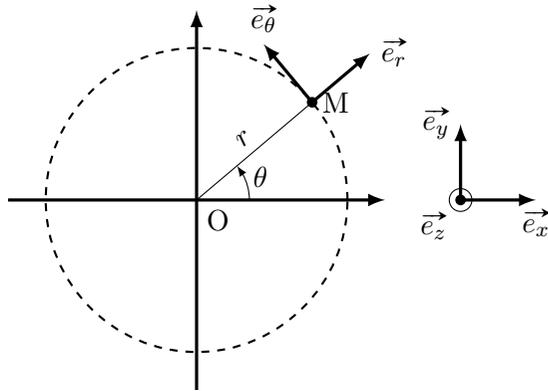


FIGURE 1 – Repérage d'un point M dans le plan du mouvement de l'électron.

On introduit le vecteur unitaire \vec{e}_z de telle sorte que \vec{L}_O soit de même direction et de même sens que \vec{e}_z . On introduit aussi la base locale cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ d'axe (O, \vec{e}_z) . Un point M du plan du mouvement est repéré par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, 0)$ comme indiqué sur la figure 1. On note donc $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$.

□ **Q 11** - Exprimer L_O en fonction de m_e , r et de $\frac{d\theta}{dt}$.

On suppose que l'électron est en mouvement circulaire autour du proton.

□ **Q 12** - Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

□ **Q 13** - Obtenir l'expression de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ de l'électron en fonction de e , m_e , ε_0 et du rayon R de sa trajectoire.

□ **Q 14** - En déduire que le rayon de la trajectoire s'écrit $R = n^2 a_0$, où a_0 est le rayon de Bohr que l'on exprimera en fonction de e , m_e , ε_0 et de h . Calculer numériquement a_0 .

□ **Q 15** - Citer la relation numérique entre le joule et l'électronvolt.

□ **Q 16** - Montrer que l'énergie mécanique de l'électron s'écrit $E_m = -\frac{E_0}{n^2}$ et donner l'expression de E_0 en fonction de e , m_e , ε_0 et de h . Calculer la valeur numérique de E_0 exprimée en joule et en eV.

□ **Q 17** - Citer la relation entre l'énergie d'un photon E_γ et sa longueur d'onde λ . Calculer, en joule et en eV, l'énergie d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm.

Lorsqu'un photon est absorbé par un atome d'hydrogène, cela provoque une transition d'un niveau d'énergie repéré par l'entier n vers un niveau d'énergie repéré par l'entier p .

□ **Q 18** - Donner, en fonction de E_0 , h , c , n et de p , l'expression des longueurs d'onde $\lambda_{n,p}$ des photons susceptibles d'être absorbés.

□ **Q 19** - On admet que les transitions associées à des longueurs d'onde dans le visible sont obtenues pour $n = 2$. Donner les valeurs de p et $\lambda_{2,p}$ correspondant effectivement à une longueur d'onde dans le visible.

□ **Q 20** - Que vaut l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour que l'électron échappe à l'attraction coulombienne du proton ?

3 - Pression de radiation

On considère la situation de la figure 2 où le demi-espace $z < 0$ est le vide et le demi-espace $z > 0$ est un conducteur parfait. Une onde incidente, de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde k et de pulsation temporelle ω , se propageant dans la direction et le sens de \vec{e}_z , est réfléchie sur la surface du conducteur. On notera respectivement \vec{k}_i , $\vec{E}_i(M,t)$ et $\vec{B}_i(M,t)$ le vecteur d'onde, le champ électrique et le champ magnétique de cette onde incidente en un point M à l'instant de date t . On donne les relations de passage

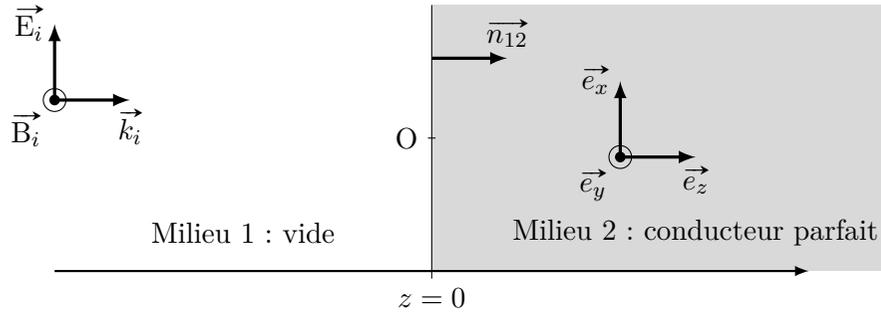


FIGURE 2 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait.

utiles pour le problème. Entre deux milieux 1 et 2, on a :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

où \vec{n}_{12} est un vecteur unitaire orthogonal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, où les champs \vec{E}_1 et \vec{B}_1 (respectivement \vec{E}_2 et \vec{B}_2) sont les champs totaux dans le milieu 1 (respectivement dans le milieu 2) au voisinage de l'interface et où \vec{j}_s est le vecteur densité de courant de surface. On rappelle que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

□ **Q 21** - Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M,t)$ en un point M à l'instant de date t . On supposera que l'onde électrique réfléchie conserve la même polarisation que l'onde incidente.

□ **Q 22** - Déterminer l'expression du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r(M,t)$ en un point M à l'instant de date t .

□ **Q 23** - Que vaut le champ magnétique total en $z = 0^-$ (dans le vide au voisinage du conducteur) ? En déduire l'expression du vecteur densité de courant de surface $\vec{j}_s(t)$ sur la surface du conducteur, à la date t .

On admet que $\vec{B}(z = 0, t) = \frac{1}{2} [\vec{B}(z = 0^-, t) + \vec{B}(z = 0^+, t)]$. En outre, en présence de courants surfaciques et d'un champ magnétique, la densité surfacique de la force de Laplace s'écrit $\vec{f}_s = \vec{j}_s \wedge \vec{B}$.

□ **Q 24** - Exprimer la force de Laplace totale \vec{F}_L s'exerçant sur l'aire S de la surface du conducteur en fonction de ϵ_0 , E_0 , S, ω et de t .

□ **Q 25** - Calculer la valeur moyenne de cette force sur une période temporelle

T de l'onde. En déduire que l'on peut lui associer une pression p , dite pression de radiation, dont l'expression est $p = \epsilon_0 E_0^2$.

On appelle intensité I du champ électromagnétique la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. On rappelle que $I = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}$.

□ **Q 26** - Calculer numériquement la pression de radiation pour la lumière venant du soleil ($I_1 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$) et pour celle d'un laser de haute intensité ($I_2 = 1 \text{ GW} \cdot \text{m}^{-2}$).

On veut désormais retrouver l'expression de la pression de radiation en décrivant la lumière de manière corpusculaire, en la modélisant par un ensemble de photons se déplaçant dans un faisceau cylindrique d'axe \vec{e}_z et de section S. On prendra une longueur d'onde λ de 600nm et on appelle \mathcal{E}_γ l'énergie d'un seul photon.

□ **Q 27** - On note n_γ^* la densité volumique de photons dans le faisceau (on se place dans le cadre d'un modèle simple où cette densité est uniforme). Exprimer n_γ^* en fonction de E_γ , c et de I puis calculer sa valeur numérique dans le cas du laser d'intensité I_2 .

□ **Q 28** - Exprimer la quantité de mouvement \vec{p}_γ d'un photon en fonction de son énergie E_γ .

□ **Q 29** - Déterminer l'expression vectorielle de la variation $\Delta \vec{p}_\gamma$ de la quantité de mouvement d'un photon lors d'un rebond sur la surface métallique en fonction de E_γ et de c . On fait l'hypothèse d'un rebond élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique.

□ **Q 30** - Exprimer la variation de quantité de mouvement $\Delta \vec{p}_{dt}$ de l'ensemble des photons qui rebondissent sur la surface métallique d'aire S pendant une durée infinitésimale dt en fonction de I, S, dt et de c .

□ **Q 31** - En déduire la force exercée par les photons sur l'aire S pendant une durée dt et retrouver l'expression de la pression de radiation.

4 - Notion de force pondéromotrice

Le principe de la force pondéromotrice est qu'un électron oscillant dans un champ électrique harmonique uniforme subit en moyenne, sur une période, une force électrique résultante nulle. En revanche, avec un champ non uniforme, la force moyenne résultante n'est pas nulle. C'est ce qu'on appelle la force pondéromotrice. Celle-ci a de nombreuses applications, comme le piégeage ou l'accélération de particules chargées.

On considère un électron libre placé dans un champ électrique oscillant

$\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t)$ et on s'intéresse à son mouvement. On ne prend en compte que la seule composante électrique de la force de Lorentz. Pour simplifier, on considère un modèle à une dimension : $\vec{E}(x,t) = E_m(x) \cos(\omega t) \vec{e}_x$, le mouvement de l'électron étant lui aussi selon l'axe (Ox). Tout d'abord, on considère $E_m(x) = E_0$ constant.

□ **Q 32** - Obtenir une valeur numérique limite de E_0 permettant de négliger le poids de l'électron par rapport à la force de Lorentz électrique. On fera intervenir l'accélération de pesanteur g .

□ **Q 33** - Vérifier que la force moyenne sur une période exercée par le champ électrique sur l'électron est nulle.

En régime sinusoïdal forcé établi, la vitesse de l'électron à la date t est de la forme $v(t)\vec{e}_x = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \vec{e}_x$.

□ **Q 34** - Exprimer V_m en fonction de e , E_0 , m_e et de ω . Préciser la valeur du déphasage φ_v entre la vitesse et le champ électrique.

On note $x(t)\vec{e}_x = X_m \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{e}_x$ le vecteur déplacement de l'électron.

□ **Q 35** - Exprimer X_m en fonction de e , E_0 , m_e et de ω . Préciser la valeur du déphasage φ_x entre la position et le champ électrique.

On considère désormais un champ non uniforme en adoptant un modèle affine simple : $E_m(x) = E_0 + \alpha x$, où α et E_0 sont deux constantes positives.

□ **Q 36** - Quelle est l'unité de α ? Dans quel sens est orienté $\vec{\text{grad}}(E_m^2)$? Donner son expression en fonction de E_0 et de α , en supposant que $|\alpha x| \ll E_0$.

On admet que, à l'échelle d'une période, le mouvement de l'électron autour de $x = 0$ reste le même que celui décrit dans la question précédente.

□ **Q 37** - Représenter le champ électrique et la force subie par l'électron lorsque $x = X_m$ et lorsque $x = -X_m$, en utilisant le fait que la position et le champ électrique sont en phase. Dans quel sens est la résultante de ces deux forces? Que peut-on en déduire quant au sens de la force pondéromotrice? □

Q 38 - Calculer la force pondéromotrice subie par l'électron, définie comme la force moyenne sur une période exercée par le champ électrique sur l'électron. On l'exprimera en fonction de e , m_e , ω , E_0 et de α .

On trouve généralement comme expression de la force pondéromotrice :

$$\vec{f}_p = -\frac{q^2}{4m_e\omega^2} \vec{\text{grad}}(E_m^2)$$

□ **Q 39** - Vérifier, sur la situation simple de variation linéaire de l'amplitude du champ décrite ci-dessus, que l'on retrouve bien le résultat de la question

précédente.

On trouve sur une page Wikipedia à propos de l'accélération plasma, la phrase suivante : « The Texas Petawatt laser facility at the University of Texas at Austin accelerated electrons to 2 GeV over about 2 cm ». Sa longueur d'onde est $\lambda = 632\text{nm}$.

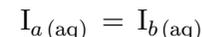
□ **Q 40** - Avec un modèle simple d'énergie cinétique initiale nulle et de force constante, évaluer la valeur de la force pondéromotrice nécessaire pour obtenir cette accélération.

□ **Q 41** - On considère que la puissance du laser $P = 1 \text{ PW} = 1 \cdot 10^{15} \text{ W}$ est répartie sur un faisceau de diamètre de 0,1 mm. Estimer le champ moyen E_0 de ce laser et en déduire la valeur de α requise pour produire la force calculée à la question précédente. On pourra utiliser que $\langle \vec{\Pi} \rangle_{\text{T}} = c \langle w \rangle_{\text{T}} \vec{e}_z = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z$

II. Cinétique et thermodynamique d'une réaction d'isomérisation.

1 - Aspect cinétique

On dit que deux espèces chimiques, notées I_a et I_b , sont isomères lorsqu'elles ont la même composition atomique mais des organisations spatiales différentes. Elles participent à une transformation chimique, dite réaction d'isomérisation, modélisée en solution aqueuse par la réaction d'équation :



On note a la concentration initiale en $I_{a(\text{aq})}$ dans la solution. À la date t , on note $x(t) = [I_{b(\text{aq})}](t)$, avec $x(0) = 0$.

On s'intéresse d'abord à la cinétique du sens direct, soit $I_{a(\text{aq})} \longrightarrow I_{b(\text{aq})}$. On suppose que la réaction est d'ordre un. On note k_1 la constante de vitesse et v_1 la vitesse volumique de réaction dans le sens direct.

□ **Q 42** - Exprimer v_1 en fonction de k_1 , a et de x .

La réaction dans le sens indirect, soit $I_{b(\text{aq})} \longrightarrow I_{a(\text{aq})}$, est également d'ordre un. On note k_2 la constante de vitesse et v_2 la vitesse volumique de réaction dans le sens indirect.

□ **Q 43** - Exprimer v_2 en fonction de k_2 et de x .

On s'intéresse à la cinétique simultanée des sens direct et indirect.

□ **Q 44** - Exprimer la vitesse de disparition globale de l'espèce I_a , c'est-à-dire $-\frac{d[I_a]}{dt}$, en fonction des vitesses v_1 et v_2 . En déduire que x vérifie une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps que l'on exprimera en fonction de k_1 , k_2 et de a .

La solution de cette équation différentielle s'écrit, pour $t \geq 0$, $x(t) = x_\infty [1 - e^{-(k_1+k_2)t}]$.

□ **Q 45** - Exprimer x_∞ en fonction de a , k_1 et de k_2 .

On cherche à suivre expérimentalement la cinétique simultanée des sens direct et indirect par mesure de l'absorbance $A(t)$ de la solution à différentes dates t . À une longueur d'onde λ donnée, chaque isomère absorbe différemment la lumière. Aussi a-t-on :

$$A = \varepsilon_a \ell [I_{a(aq)}] + \varepsilon_b \ell [I_{b(aq)}]$$

où ε_a et ε_b sont les coefficients d'absorptivité molaire respectifs de I_a et de I_b pour la longueur d'onde choisie et où ℓ est la largeur de la cuve utilisée pour mesurer l'absorbance. On réalise l'expérience à la température $T = 20^\circ\text{C}$.

□ **Q 46** - Citer le nom de l'appareil permettant de mesurer l'absorbance d'une solution. Expliciter la manière avec laquelle on procède pour choisir la longueur d'onde λ de travail optimale. Définir l'opération dite de « réglage du blanc ». On se limitera à un paragraphe de cinq lignes maximum.

t(min)	0	1	3	5	10	∞
u(t) (s)		2	2	2	2	
A	0,150	0,186	0,234	0,263	0,294	$A_\infty = 0,306$
u(A)		$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	

TABLE 1 – Mesures et incertitudes-type de l'absorbance et des dates au cours de l'expérience décrite dans le texte.

Les mesures effectuées sont résumées dans le tableau 1. Pour exploiter les mesures, on cherche à réaliser une régression linéaire en représentant les variations, en fonction de t , d'une grandeur $g(A, A_0, A_\infty)$ s'exprimant en fonction de A , A_0 et A_∞ . Les coefficients de la régression linéaire sont obtenus par une simulation de Monte Carlo, en prenant en compte les incertitudes-types sur les

dates t et l'absorbance A . La simulation est réalisée à l'aide d'un script Python reproduit dans le script ci-dessous. On précise que les fonctions `mean` et `std` de la bibliothèque `numpy` prennent en argument un `ndarray` (un tableau de valeurs) et renvoient respectivement la moyenne et l'écart-type de ce tableau. En outre, la fonction `uniform` du module `random` de `numpy` permet de tirer un nombre aléatoire entre les deux valeurs données en argument avec une probabilité uniforme sur l'intervalle.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from numpy.random import uniform
from numpy import polyfit
from math import sqrt
# Dates des mesures et incertitudes-type
t = [1,3,5,10] # minutes
u_t = [2/60,2/60,2/60,2/60] # minutes

# Absorbances mesurées et incertitudes-type
A = [0.186,0.234,0.263,0.294]
u_A = [2e-3,2e-3,1e-3,1e-3]

# Absorbance à t=0 et au bout d'une durée « très grande »
A0 = 0.150
Ainfy = 0.306

N=1000 # nombre de simulations

#Initialisation du stockage des coefficients de la régression linéaire
aire
a_MC=[]
b_MC=[]

for j in range(N):
    #Initialisation du stockage des coefficients de régression linéaire
    t_MC_k = []
    A_MC_k = []

    for i in range(len(t)):
        # Simulation des mesures par tirage aléatoire dans l'intervalle d'incertitude
        # sqrt est la fonction racine carrée
        t_MC_k.append(t[i]+uniform(-u_t[i]*sqrt(3),u_t[i]*sqrt(3)))
        A_MC_k.append(A[i]+uniform(-u_A[i]*sqrt(3),u_A[i]*sqrt(3)))

# Permet de réaliser des opérations sur tous les éléments d'une «
```

```

liste » (conversion list vers ndarray)
A_MC_k=np.array(A_MC_k)

# Régression linéaire pour la simulation numérotée k
# Attention : log est le logarithme népérien ln
# La fonction polyfit renvoie un tuple de deux éléments obtenus par
# régression linéaire
# Le premier est le coefficient directeur, le second l'ordonnée à l'
# origine
reg_lin_MC = polyfit(t_MC_k,np.log(1-((A_MC_k-A0)/(Ainfy-A0))),1)

# On conserve les deux coefficients obtenus apr régression linéaire
a_MC.append(reg_lin_MC[0])
b_MC.append(reg_lin_MC[1])

a = np.mean(a_MC)
b = np.mean(b_MC)

# Aucune explication sur le paramètre ddof n'est attendue et il peut
# être ignoré
u_a = np.std(a_MC, ddof=1)
u_b = np.std(b_MC, ddof=1)

print(a, u_a, b, u_b)

```

□ **Q 47** - En exploitant la ligne 42 du script, donner l'expression de $g(A, A_0, A_\infty)$.

On admet que la relation attendue entre $g(A, A_0, A_\infty)$ et t est de la forme $g(A, A_0, A_\infty) = -(k_1 + k_2)t$.

□ **Q 48** - Expliquer le principe de la méthode de Monte Carlo utilisée pour déterminer les valeurs des coefficients de la régression linéaire ainsi que leur incertitude. On s'appuiera, en particulier, sur les lignes 32, 33, 42, 48, 49, 52 et 53. On se limitera à un paragraphe de huit lignes maximum.

Lorsque l'on interprète le script, la ligne $-0.256, 0.010, -0.007, 0.032$ s'affiche à l'écran.

□ **Q 49** - Justifier l'accord entre l'expérience et la relation $g(A, A_0, A_\infty) = -(k_1 + k_2)t$ et donner la valeur calculée de $k_1 + k_2$.

On s'intéresse désormais à l'équilibre chimique associé à la réaction d'isomérisation, modélisée par la réaction d'équation $I_{a(aq)} = I_{b(aq)}$. L'équilibre est atteint au bout d'une très grande durée de réaction.

2 - Aspect Thermodynamique

□ **Q 50** - Citer la relation à l'équilibre chimique entre les concentrations de I_a , de I_b , ta constante thermodynamique K° .

À $T = 20^\circ\text{C}$, l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ de la réaction d'isomérisation vaut $\Delta_r G^\circ(T) = -3,05 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

□ **Q 51** - Calculer la valeur de $K^\circ(T)$ à la température de l'expérience ($T = 20^\circ\text{C}$). On donne $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

L'équilibre chimique est un équilibre dynamique : les réactions dans les sens direct et indirect se déroulent simultanément et se compensent.

□ **Q 52** - Exprimer $K^\circ(T)$ en fonction de k_1 et de k_2 . Calculer numériquement k_1 et k_2 à la température de l'expérience.

III. Effet de pointe

Au voisinage de pointes électriques, le champ électrique est particulièrement intense, on parle de « pouvoir des pointes ».

Dans l'air, si la valeur du champ électrique dépasse la valeur du champ disruptif de l'ordre de $E_d \simeq 3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, les molécules s'ionisent.

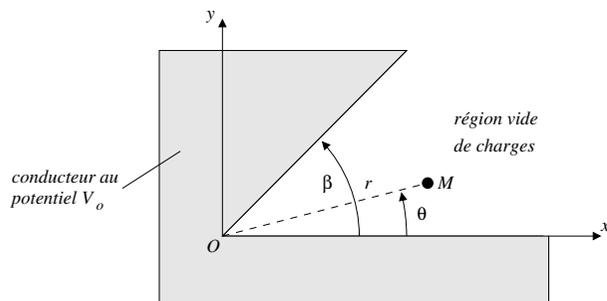
Lors d'une tempête orageuse, en présence d'une forte différence de potentiel entre les nuages et le sol, la décharge se produira plus favorablement au voisinage d'un conducteur de forme pointue relié au sol.

Ce concept est mis à profit dans les paratonnerres. « Le paratonnerre n'attire pas la foudre mais rend plus probable, grâce à l'effet de pointe, le parcours d'un claquage du diélectrique que constitue l'atmosphère. Ce claquage suit un parcours souvent initié par un précurseur. Le paratonnerre captera donc la foudre dans sa zone d'influence (zone de protection), mais les éclairs qui auraient eu tendance à tomber en dehors de cette zone continueront à le faire »¹. Ci-contre, la tour Eiffel heurtée par la foudre, 3 juin



1. Source : Wikipedia, Paratonnerre

1902, 21h20.



Dans la suite du problème, on s'intéresse aux caractéristiques du potentiel électrique et du champ électrostatique au voisinage d'un coin ou d'une pointe. On considère un problème plan (invariant selon la direction Oz) dans lequel deux conducteurs plans portés au

potentiel V_0 s'interceptent avec un angle β . Le coin correspond à : $0 < \beta < \pi$, la pointe à : $\pi < \beta < 2\pi$. On adopte un système de coordonnées cylindriques et on cherche à déterminer le potentiel dans le domaine $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, \beta[$.

On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques pour une fonction $\Phi(r, \theta, z)$:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Dans toute la suite, on ne cherche le potentiel que dans un voisinage de l'origine, la valeur du potentiel à grande distance étant imposée par des conditions aux limites sans intérêt pour le problème posé. En particulier, on ne cherchera pas à étudier les conséquences des conditions aux limites du type $r \rightarrow +\infty$.

□ **Q 53** - Justifier que le potentiel électrostatique V ne dépende pas de la coordonnée z . Justifier que $\Delta V = 0$ où Δ est l'opérateur Laplacien.

Pour la suite, on cherche une solution de l'équation $\Delta V = 0$ sous la forme :

$$V(r, \theta) = V_0 + f(r)g(\theta)$$

□ **Q 54** - Montrer que

$$g''(\theta) = cste \times g(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) = -cste \times \frac{f(r)}{r}$$

avec $cste$ une constante.

Par la suite, on considère uniquement le cas : $cste = -\nu^2$, avec ν un réel positif.

□ **Q 55** - Justifier que les fonctions f et g sont de la forme :

$$\forall r \in]0, \infty[, f(r) = ar^\nu + br^{-\nu} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \beta[, g(\theta) = A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)$$

□ **Q 56** - En utilisant des conditions aux limites pertinentes, simplifier les expressions obtenues pour f et g et montrer en particulier que $\nu = \frac{m\pi}{\beta}$ avec m un entier positif.

□ **Q 57** - Montrer que la solution la plus générale peut alors se mettre sous la forme :

$$V(r, \theta) = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)$$

avec a_m des constantes indéterminées à ce stade. Pour des points suffisamment voisins de l'origine, le premier terme du développement en loi de puissance domine (on le supposera non nul) et le potentiel prend la forme simplifiée :

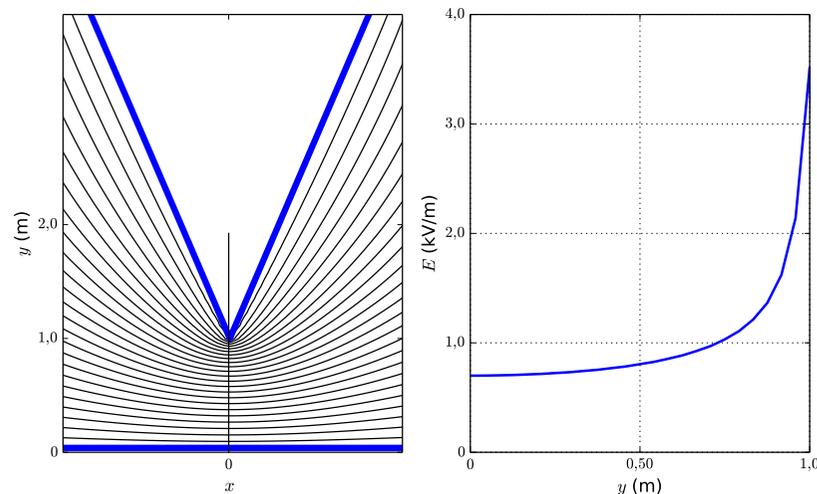
$$V(r, \theta) = V_0 + a_1 r^{\pi/\beta} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

□ **Q 58** - En déduire les composantes du champ électrique.

□ **Q 59** - Justifier par des arguments de symétrie, les valeurs $E_\theta(r, \beta/2)$, $E_r(r, 0)$, $E_r(r, \beta)$?

□ **Q 60** - On considère le cas d'une pointe : $\pi < \beta < 2\pi$. Que dire, dans ce cas, de $\lim_{r \rightarrow 0} |\vec{E}|$? Commenter ce résultat en lien avec l'introduction.

Les graphiques suivants présentent la forme des équipotentielles et la norme du champ le long de l'axe de symétrie (Oy) lorsqu'on place une pointe conductrice au potentiel électrostatique $V_0 = 1,0$ kV à une distance $d = 1,0$ m d'un plan conducteur au potentiel nul.



Ci-contre, à titre d'information, la figure donne l'intensité du champ électrique dans le domaine étudié.

□ **Q 61** - À l'aide des figures fournies, représenter quelques lignes de champ électriques aux voisinages de la pointe. Justifier l'évolution du champ électrique au regard des lignes de champ.

IV. Propagation et milieu transparent

D'après Mines 19

La loi de Gladstone-Dale relie l'indice d'un gaz à sa pression et sa température. Elle peut être expliquée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Nous assimilons une molécule d'un gaz composant l'air à un noyau et **deux** électrons optiquement actifs. Nous notons $\vec{r}(t)$ le vecteur position d'un électron par rapport au noyau, $\vec{v}(t)$ sa vitesse, m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique. L'interaction entre le noyau et l'électron est modélisée par deux forces s'exerçant sur l'électron : une force de rappel élastique $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ et une force de frottement fluide $-m_e\Gamma\vec{v}$. L'électron est soumis à l'action du champ électrique d'une onde plane que nous considérons localement uniforme à $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$.

□ **Q 62** - Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de l'électron.

□ **Q 63** - Pourquoi n'avons nous pas pris en compte l'effet du champ magnétique de l'onde sur l'électron ?

□ **Q 64** - Nous nous intéressons à la solution en régime forcé de cette équation. En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la vitesse \vec{v} d'un électron en fonction du champ électrique.

□ **Q 65** - Pourquoi ne prenons-nous pas en compte le mouvement des noyaux des molécules induit par le champ électrique de l'onde plane ?

□ **Q 66** - Montrez alors que le vecteur densité de courant électronique total peut s'écrire :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

où κ est un facteur numérique que l'on déterminera et n^* est le nombre volumique, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume du gaz.

□ **Q 67** - À quel type de filtre correspond γ ? Soit γ_0 le maximum du module de γ , déterminez l'expression de γ_0 .

□ **Q 68** - Nous définissons la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \gamma/\gamma_0$, exprimez cette fonction de transfert et précisez l'expression de son facteur de qualité Q . Représentez le gain de ce filtre dans un diagramme de Bode pour un facteur de qualité de l'ordre de la centaine.

□ **Q 69** - L'air est assimilé à un milieu neutre électriquement mais polarisable : une onde électromagnétique dans le domaine du visible induit un mouvement des électrons qui se traduit par l'apparition d'un vecteur densité de courant selon la question précédente. Donnez alors les équations de Maxwell dans ce milieu. Montrer qu'en introduisant une permittivité relative ε_r complexe que l'on identifiera, on peut écrire l'équation de propagation pour le champ électrique sous la forme

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

□ **Q 70** - On néglige les frottements fluides et on suppose que la pulsation de l'onde ω est très inférieure à ω_0 , montrez alors que cette permittivité relative se simplifie en :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\kappa n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}$$

□ **Q 71** - Quelle est la relation entre la permittivité relative et l'indice n ? En remarquant que $n^2 - 1 \ll 1$, donnez l'expression de l'indice en fonction de n^* , e , m_e , ε_0 et ω_0 .

□ **Q 72** - Reliez le nombre volumique n^* la pression et la température de l'air. Déduisez-en l'expression de l'indice en fonction de la pression, de la température et des autres constantes.

□ **Q 73** - Exprimez alors le coefficient a de la formule suivante :

$$n - n_0 = \frac{a}{T_0} (p - p_0)$$

en fonction de e , m_e , ε_0 , k_B et ω_0 .

1 - Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

□ **Q 1** - Dans un milieu sans charges ni courants, la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant \vec{j} sont nulles. Ainsi, les équations de Maxwell sont :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{Maxwell-Gauss} \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Faraday}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell-flux} \qquad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

□ **Q 2** - On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

Ensuite, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Or, $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\Delta} \vec{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss ainsi :

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

À partir de l'équation de d'Alembert

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

on identifie la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

□ **Q 3** - On considère la forme complexe du champ électrique correspondant à une onde progressive monochromatique se propageant dans la direction $+\vec{e}_z$:

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - kz)]$$

$$\text{div } \vec{E}(M,t) = 0$$

comme $\vec{E}(M,t)$ ne dépend que de la coordonnée z :

$$\text{div } \vec{E}(M,t) = \frac{\partial E_z}{\partial z} = -jk E_{0z} \exp[j(\omega t - kz)]$$

Ainsi, on a forcément $E_{0z} = 0$: la composante longitudinale du champ électrique est nulle, autrement dit **le champ électrique est transverse**.

On réalise le même raisonnement sur le champ magnétique en considérant l'équation de Maxwell-flux et $\vec{B}(M,t) = \vec{B}_0 \exp[j(\omega t - kz)]$: on obtient que **le champ magnétique est également transverse**.

□ **Q 4** - Le champ électrique est polarisé rectilignement suivant \vec{e}_x : $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$. Donc :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp[j(\omega t - kz)] \vec{e}_x$$

avec $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi}$:

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp[j(\omega t - kz + \varphi)] \vec{e}_x$$

D'où, comme $\vec{E}(M,t) = \text{Re}(\vec{E}(M,t))$:

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x}$$

□ **Q 5** - On utilise l'équation de d'Alembert. On évalue d'une part :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \vec{e}_x$$

car \vec{E} ne dépend que de z et n'a de composante que selon \vec{e}_x . Ainsi :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x$$

D'autre part :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x$$

Ainsi :

$$-k^2 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) = -\frac{1}{c^2} \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

□ **Q 6** - Il s'agit d'une OPPM dans le vide donc d'après la relation de structure :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_y$$

□ **Q 7** - On a :

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} \quad \text{donc} \quad \vec{\Pi}(M,t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_z$$

□ **Q 8** - On a

$$w(M,t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}(M,t)^2 + \frac{\vec{B}(M,t)^2}{2\mu_0}$$

Avec ce que l'on a montré :

$$w(M,t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi) + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi)$$

Comme $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$:

$$w(M,t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi)$$

□ **Q 9** - Comme $\langle \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \rangle_T = 1/2$:

$$\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle_T = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z = c \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \vec{e}_z = c \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z$$

De même :

$$\langle w(M,t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

Ainsi, on a bien montré que :

$$\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle_T = c \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z = c \langle w(M,t) \rangle \vec{e}_z$$

2 - Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

□ **Q 10** - Dans le cadre du modèle de Bohr, l'électron ne subit que la force exercée par le proton, fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On adopte donc, dans le référentiel du proton, le repère et les notations de l'énoncé. Sur l'électron s'applique :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r$$

Le moment de cette force par rapport au point O est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Le théorème du moment cinétique en O appliqué au point M donne :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} = \vec{0}$$

Le moment cinétique est constant. À tout instant :

$$\overrightarrow{L}_O = m_e \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

les vecteurs \overrightarrow{OM} et \vec{v} restent orthogonal à la direction constante \overrightarrow{L}_O à tout moment : le mouvement se fait dans le plan contenant O et perpendiculaire à \overrightarrow{L}_O .

□ **Q 11** - Comme le mouvement est plan, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

Soit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L}_O &= m_e \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= m_e r \frac{dr}{dt} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r + m_e r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m_e r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{L}_O = m_e r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$$

□ **Q 12** - Le mouvement est circulaire : $r = R = \text{cte}$. Par conservation du moment cinétique, cela impose que $d\theta/dt$ soit constante. **Le mouvement est circulaire et uniforme.**

□ **Q 13** - On reprend l'étude mécanique entamée **Q10**. L'accélération de l'électron en mouvement circulaire est :

$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{e}_r = -\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} \vec{e}_r$$

D'après le PFD, $m_e \vec{a} = \vec{F}$. Projeté sur \vec{e}_r on obtient :

$$-m_e \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R}}}$$

□ **Q 14** - Le moment cinétique est :

$$\vec{L}_O = m_e R \|\vec{v}\| \vec{e}_z = \sqrt{\frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0}} \vec{e}_z$$

Ainsi :

$$\frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2}$$

Soit :

$$\boxed{R = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}} \quad \text{on identifie :} \quad \boxed{a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 5,31 \times 10^{-11} \text{ m} = 53,1 \text{ pm}}$$

□ **Q 15** - Un électron-volt est l'énergie cinétique d'un électron accéléré par une tension de 1 V :

$$\boxed{1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}}$$

□ **Q 16** - L'énergie mécanique correspondante est :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m_e \|\vec{v}\|^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Soit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

On obtient alors :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{où} \quad E_0 = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,5 \text{ eV}}$$

□ **Q 17** - L'énergie d'un photon est :

$$\boxed{E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}}$$

Pour $\lambda = 600 \text{ nm}$, on a $E_\gamma = 3,31 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,07 \text{ eV}$. □ **Q 18** - Lorsque l'électron passe du niveau d'énergie n au niveau d'énergie p , il a absorbé une énergie $\mathcal{E}_{m,p} - \mathcal{E}_{m,n}$ soit :

$$\Delta \mathcal{E} = E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

Soit :

$$\boxed{\lambda_{n,p} = \frac{hc}{E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)}}$$

□ **Q 19** - La transition $2 \rightarrow 3$ est associée à l'absorption d'un photon de longueur d'onde $\lambda_{2,3} = 660 \text{ nm}$, la transition $2 \rightarrow 4$ à une longueur d'onde $\lambda_{2,4} = 489 \text{ nm}$, la transition $2 \rightarrow 5$ à une longueur d'onde $\lambda_{2,5} = 437 \text{ nm}$, la transition $2 \rightarrow 6$ à une longueur d'onde $\lambda_{2,6} = 413 \text{ nm}$, la transition $2 \rightarrow 7$ à une longueur d'onde $\lambda_{2,7} = 400 \text{ nm}$, les transitions $2 \rightarrow p$ pour $p \geq 8$ sont associées à des longueurs d'ondes inférieures à 400 nm considérées non visibles.

□ **Q 20** - Si l'électron est dans son état fondamental, l'énergie d'ionisation est l'énergie nécessaire pour avoir une énergie mécanique nulle et ainsi atteindre un état de diffusion. Ainsi :

$$\boxed{E_i = 0 - (-E_0) = E_0 = 13,5 \text{ eV}}$$

3 - Pression de radiation

□ **Q 21** - Le champ électromagnétique correspondant à l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente, et se propage dans le sens des z décroissants : $\vec{E}_r = E_r \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_x$. Ainsi :

$$\vec{E}(z = 0^-) = \vec{E}_i(z = 0^-) + \vec{E}_r(z = 0^-) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + E_r \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x = (E_0 + E_r) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x$$

Ensuite, comme le champ est nul dans le conducteur $\vec{E}(z = 0^+) = 0$. Ainsi :

$$\vec{e}_z \wedge (\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-)) = -(E_0 + E_r) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

On utilise la relation de passage $\vec{e}_z \wedge (\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-)) = \vec{0}$. Comme la relation est vraie quelque soit t :

$$E_r = -E_0$$

D'où :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_x$$

□ **Q 22** - On procède comme à la question **Q6** en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E}_r = \frac{\partial E_{rx}}{\partial z} \vec{e}_y = kE_0 \sin(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_y$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t} = -kE_0 \sin(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_y$$

Le champ magnétique réfléchi étant de moyenne nulle également ; et on utilise $\omega/k = c$:

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_y$$

□ **Q 23** - Par ailleurs :

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_y$$

Ainsi :

$$\vec{B}(z = 0^-) = \vec{B}_i(z = 0^-) + \vec{B}_r(z = 0^-) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Ensuite, comme le champ est nul dans le conducteur $\vec{B}(z = 0^+) = 0$. On utilise la relation de passage :

$$\mu_0 \vec{j}_s = \vec{e}_z \wedge (\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-)) = \vec{e}_z \wedge \left(-\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y \right) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x$$

Soit :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x$$

□ **Q 24** - La force de Laplace par unité de surface est d'après l'énoncé :

$$\vec{f}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x \wedge \left(\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y \right) = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t + \varphi) \vec{e}_z$$

La force de Laplace sur une surface S est $S \times \vec{f}_s$; et comme $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$:

$$\vec{F}_L = 2\varepsilon_0 S E_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \vec{e}_z$$

□ **Q 25** - La moyenne sur une période de cette force est, comme $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle_T = 1/2$:

$$\langle \vec{F}_L \rangle_T = \varepsilon_0 S E_0^2 \vec{e}_z$$

La pression de radiation est :

$$p = \frac{\langle \vec{F}_L \rangle_T \cdot \vec{e}_z}{S} \quad \text{soit} \quad p = \varepsilon_0 E_0^2$$

□ **Q 26** - D'après la **Q9**, on a $c\varepsilon_0 E_0^2/2 = I$ ainsi :

$$p = \frac{2I}{c}$$

Application numérique :

- pour $I_1 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$: $p = 6,7 \times 10^{-6} \text{ Pa}$;
- pour $I_1 = 1 \text{ GW} \cdot \text{m}^{-2}$: $p = 6,7 \text{ Pa}$.

□ **Q 27** - Entre t et $t + dt$, les photons contenus à t dans le cylindre de surface S et de longueur cdt vont frapper la surface S. Ils sont au nombre de $n_\gamma^* S c dt$, leur énergie est :

$$n_\gamma^* S c dt \times E_\gamma$$

Cette énergie est également $ISdt$ donc :

$$n_\gamma^* S c dt E_\gamma = ISdt \quad \text{soit} \quad n_\gamma^* = \frac{I}{c E_\gamma}$$

Application numérique : $n_\gamma^* = 1,0 \times 10^{19} \text{ photons} \cdot \text{m}^{-3}$. □ **Q 28** - La

quantité de mouvement d'un photon est :

$$\vec{p}_\gamma = \hbar \vec{k} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_z = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z$$

Comme $E_\gamma = hc/\lambda$, on a :

$$\vec{p}_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \vec{e}_z$$

□ **Q 29** - Lorsqu'il rebondit, sa quantité de mouvement passe de \vec{p}_γ à $-\vec{p}_\gamma$, la variation de quantité de mouvement du photon est :

$$\Delta \vec{p}_\gamma = -\frac{2E_\gamma}{c} \vec{e}_z$$

□ **Q 30** - L'ensemble des photons contenus dans le cylindre de surface S et de largeur cdt rebondissent, la variation de quantité de mouvement totale est :

$$\Delta \vec{p}_{dt} = -n_\gamma^* S c dt \frac{2E_\gamma}{c} \vec{e}_z \quad \text{soit, d'après Q27} \quad \Delta \vec{p}_{dt} = -\frac{2I}{c} S dt \vec{e}_z$$

□ **Q 31** - La force exercée par les photons sur la plaque est l'opposée de la force exercée par la plaque sur les photons, cette dernière étant $\Delta \vec{p}_{dt}/dt$ d'après le principe fondamental de la dynamique. Ainsi :

$$\vec{F} = \frac{2I}{c} S \vec{e}_z$$

On retrouve, en identifiant p à partir de $\vec{F} = pS\vec{e}_z$:

$$p = \frac{2I}{c}$$

4 - Notion de force pondéromotrice

□ **Q 32** - La force subie par l'électron est de norme $\|\vec{F}_e\| = eE_0$. Son poids est de norme $m_e g$. Pour négliger le poids de l'électron, il faut que :

$$E_0 \gg \frac{m_e g}{e} = 5,6 \times 10^{-11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

□ **Q 33** - On a :

$$\langle \vec{F} \rangle_T = \langle -eE_m(x) \cos(\omega t) \rangle_T \vec{e}_x = -eE_m(x) \langle \cos(\omega t) \rangle_T \vec{e}_x = \vec{0}$$

La force est bien de moyenne nulle.

□ **Q 34** - On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel du laboratoire galiléen. Le poids est négligeable, la seule force s'exerçant sur l'électron est $\vec{F} = -eE_m(x) \cos(\omega t) \vec{e}_x$. D'après le PFD appliqué à l'électron :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

On note $v = \dot{x}$ la composante x de la vitesse. On projette le PFD sur \vec{e}_x :

$$m_e \frac{dv}{dt} = -eE_0 \cos(\omega t)$$

En RSF, on considère $\underline{v}(t) = V_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = \underline{V}_m \exp(j\omega t)$. Ainsi :

$$j\omega m_e \underline{V}_m = -eE_0 \quad \text{donc} \quad \underline{V}_m = -\frac{eE_0}{j\omega m_e} = j \frac{eE_0}{m_e \omega}$$

L'amplitude de $v(t)$ est $|\underline{V}_m|$ et la phase est $\arg(\underline{V}_m)$:

$$\underline{V}_m = \frac{eE_0}{m_e \omega} \quad \text{et} \quad \varphi_v = \frac{\pi}{2}$$

□ **Q 35** - $\underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m$ donc :

$$\underline{X}_m = \frac{eE_0}{m_e \omega^2}$$

Ainsi :

$$\underline{X}_m = |\underline{X}_m| = \frac{eE_0}{m_e \omega^2} \quad \text{et} \quad \varphi_x = 0$$

La position de l'électron et le champ électrique sont en phase.

□ **Q 36** - Le champ électrique s'exprime en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ dans les unités du système international, x en mètres donc α s'exprime en $\text{V} \cdot \text{m}^{-2}$ dans les unités S.I.

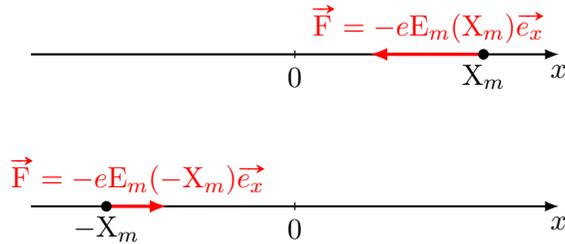
Ensuite :

$$\vec{\text{grad}}(E_m^2) = \vec{\text{grad}}(E_0 + \alpha x)^2 = 2\alpha(E_0 + \alpha x) \vec{e}_x$$

Le gradient est dans la direction \vec{e}_x (il indique la zone de champ électrique fort). Dans la limite où $\alpha x \ll E_0$:

$$\vec{\text{grad}}(E_m^2) = 2\alpha E_0 \vec{e}_x$$

□ **Q 37** - À gauche, la situation où $x = X_m$: le champ électrique ressenti est vers la droite (car en phase avec la position), donc la force vers la gauche. À droite, la situation où $x = -X_m$: la force vers la droite par le même argument, d'amplitude moindre car $\|\vec{E}(X_m)\| > \|\vec{E}(-X_m)\|$.



La somme de ces deux forces est vers la gauche : la force moyenne est donc non nulle est orientée dans la direction $-\vec{e}_x$. □ **Q 38** - On exprime la force ressentie par l'électron :

$$\vec{F} = -eE_m(x)\vec{e}_x = -e\left(E_0 \cos(\omega t) + \alpha \frac{eE_0}{m_e\omega^2} \cos^2(\omega t)\right)\vec{e}_x$$

Ainsi :

$$\langle \vec{F} \rangle_T = -\alpha \frac{e^2 E_0}{2m_e\omega^2} \vec{e}_x$$

□ **Q 39** - On substitue $\alpha E_0 \vec{e}_x$ par $\vec{\text{grad}}(E_m^2)/2$ dans l'expression ci-dessus (d'après **Q36**). On a bien :

$$\vec{f}_p = -\frac{e^2}{4m_e\omega^2} \vec{\text{grad}}(E_m^2)$$

□ **Q 40** - Le travail de la force motrice est, d'après le TEC, en négligeant toute autre force :

$$W_{AB}(\vec{f}_p) = \Delta E_c$$

avec $\Delta E_c = 2 \text{ GeV}$ et $W_{AB}(\vec{f}_p) = f_p D$ ($D = 2 \text{ cm}$). Ainsi :

$$f_p = \frac{\Delta E_c}{D} = 1,6 \times 10^{-8} \text{ N}$$

□ **Q 41** - L'intensité est le rapport de la puissance du faisceau sur sa surface :

$$I = \frac{4P}{\pi d^2}$$

où $d = 0,1 \text{ mm}$ est le diamètre du faisceau. Or $I = \varepsilon_0 c E_0^2 / 2$ donc :

$$E_0 = \sqrt{\frac{8P}{\pi d^2 \varepsilon_0 c}} = 9,8 \times 10^{12} \text{ V.m}^{-1}$$

d'où

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m_e\omega^2 f_p}{e^2 E_0}} = 1,7 \times 10^8 \text{ V.m}^{-2}$$

I. PROBLÈME 2

Étude cinétique et thermodynamique d'une réaction d'isomérisation.

□ **Q 42** - On dresse le tableau d'avancement, conformément aux notations de l'énoncé :

Équation de la réaction	$I_a(\text{aq})$	=	$I_b(\text{aq})$
État initial	a		0
En cours de transformation	$a - x$		x

L'ordre de la réaction dans le sens direct est 1 donc :

$$v_1 = k_1[I_a] = k_1(a - x)$$

□ **Q 43** - L'ordre de la réaction dans le sens inverse est également 1 donc :

$$v_2 = k_2[I_b] = k_2 x$$

□ **Q 44** - I_a est consommé par la première réaction et produit par la seconde donc :

$$\frac{d[I_a]}{dt} = v_2 - v_1$$

Ainsi :

$$\boxed{-\frac{d[I_a]}{dt} = v_1 - v_2}$$

Comme $[I_a] = a - x$:

$$\frac{dx}{dt} = -k_1x - k_2x + k_1a \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1a}$$

□ **Q 45** - x_∞ est la valeur asymptotique, correspondant à $dx/dt = 0$. Soit :

$$\boxed{x_\infty = \frac{k_1}{k_1 + k_2}a}$$

□ **Q 46** - Un **spectrophotomètre** permet d'enregistrer l'absorbance de la solution en fonction du temps.

Pour choisir la longueur d'onde de travail optimale, on enregistre l'absorbance de la solution en fonction de la longueur d'onde. La longueur d'onde pour laquelle celle-ci est maximale permet la meilleure sensibilité : on la choisit comme longueur d'onde de travail.

Régler le blanc signifie mesurer l'absorbance du solvant à la longueur d'onde de travail, que l'on fixe nulle.

□ **Q 47** - On lit :

$$\boxed{g(A, A_0, A_\infty) = \ln\left(1 - \frac{A - A_0}{A_\infty - A_0}\right)}$$

□ **Q 48** - Pour considérer la propagation des incertitudes sur les valeurs expérimentales t_i ou A_i , on réalise la régression linéaire sur des valeurs prises au hasard dans les intervalles correspondant (par exemple dans l'intervalle 58s; 62s pour t_1) (lignes 32 et 33). On réalise $N = 1000$ régressions linéaires correspondant à N tirages indépendants de t_i et A_i (ligne 42). Les moyennes des N pentes d'une part et des N ordonnées à l'origine

d'autre part ainsi obtenues constituent les valeurs retenues pour la régression linéaire des résultats expérimentaux (ligne 48). Les écarts-types des listes des N pentes et des N ordonnées à l'origine est l'incertitude-type sur ces valeurs retenues (ligne 49).

□ **Q 49** - L'ordonnée à l'origine est :

$$-0,007 \pm 0,03$$

une ordonnée à l'origine nulle est compatible avec ces mesures car 0 est contenu dans l'intervalle d'incertitude. On peut donc considérer le modèle confirmé. Néanmoins, une visualisation graphique est nécessaire pour vérifier l'alignement des points. Enfin, la pente est :

$$-0,26 \pm 0,01 \text{ m}^{-1}$$

On identifie :

$$\boxed{k_1 + k_2 = 0,26 \pm 0,01 \text{ m}^{-1}}$$

□ **Q 50** - On a :

$$K^\circ = \frac{[I_b]_{eq}}{[I_a]_{eq}}$$

□ **Q 51** - On a :

$$\boxed{K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = 3,5}$$

□ **Q 52** - On part de :

$$[I_b]_{eq} = x_\infty = \frac{k_1}{k_1 + k_2}a$$

et

$$[I_a]_{eq} = a - x_\infty = \frac{k_2}{k_1 + k_2}a$$

Soit :

$$\boxed{K^\circ = \frac{k_1}{k_2}}$$

D'où $k_2 K^\circ + k_2 = 0,26 \text{ min}^{-1}$ soit :

$$k_2 = \frac{1}{1 + K^\circ} \times 0,265 \text{ min}^{-1} = 0,205 \text{ min}^{-1}$$

$$k_1 = \frac{K^\circ}{1 + K^\circ} \times 0,265 \text{ min}^{-1} = 0,060 \text{ min}^{-1}$$

II. Effet de pointe

□ **Q 53** - Le problème donc la distribution de charge est invariante par translation selon Oz, d'après le principe de Curie, les conséquences, champ et potentiel électrique ne dépendent pas de z.

□ **Q 54** - Dans une zone vide charge, $\Delta V = 0$, en utilisant l'expression du laplacien :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f'(r) g(\theta) \right) + \frac{1}{r^2} f(r) g''(\theta) = 0 \quad \text{soit} \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(r f'(r) g(\theta) \right) + f(r) g''(\theta) = 0$$

Isolons ce qui dépend de la position de la dépendance angulaire :

$$-\frac{r}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f'(r) \right) = \frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

Le membre de gauche dépend de r, celui de droite de θ , chaque membre doit nécessairement être constant pour être valable pour tout r et θ . On en déduit que :

$$-\frac{r}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f'(r) \right) = C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = C^{\text{te}}$$

□ **Q 55** - Avec l'expression de la constante proposée, on a :

$$g'' + \nu^2 g = 0 \quad \text{et} \quad \nu^2 \frac{f}{r} = \frac{dr}{dr} = 0$$

Pour g, il s'agit de la solution générale d'une équation du second ordre linéaire.

Pour f, on pourrait en physique se contenter de remplacer dans l'équation différentielle, la solution convient. Mais on est en MP!!! En développant on trouve :

$$r^2 f'' + r f' - \nu^2 f = 0$$

La recherche des solutions de cette équation différentielle d'ordre 2 s'obtient en étudiant les fonctions du type $f(r) = r^\alpha$. En injectant, on a :

$$r^2 \alpha(\alpha - 1) r^{\alpha-2} + r \times \alpha r^{\alpha-1} - \nu^2 r^\alpha = 0 \quad \text{soit} \quad \alpha(\alpha - 1) + \alpha r^\alpha - \nu^2 r^\alpha = 0$$

Ainsi seules les puissances de type $\alpha = \pm \nu$ conviennent. Comme il s'agit d'une équation d'ordre 2, toute famille libre de dimension deux est une solution de l'équation, ainsi :

$$f(r) = A e^\nu + B r^{-\nu}$$

□ **Q 56** - Le potentiel vaut V_0 sur la plaque donc :

$$g(0) = g(\beta) = 0$$

On en déduit que

$$A = 1 \quad \text{et} \quad \nu \beta = m\pi$$

Par ailleurs, le potentiel ne peut diverger en 0, on a donc $b = 0$. Il reste finalement :

$$f(r) = a r^{m\pi/\nu} \quad \text{et} \quad g(\theta) = A \sin(m\pi\theta/\nu)$$

□ **Q 57** - L'équation de Poisson étant linéaire, une somme de solutions reste solution de l'équation et la solution la plus générale pour le problème posé est de la forme :

$$V(r, \theta) = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)$$

□ **Q 58** - Avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$, on en déduit en coordonnées cylindriques :

$$E_r(r,\theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r(r,\theta) = -\frac{\pi a_1}{\beta} r^{\pi/\beta-1} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$E_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta(r,\theta) = -\frac{\pi a_1}{\beta} r^{\pi/\beta-1} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

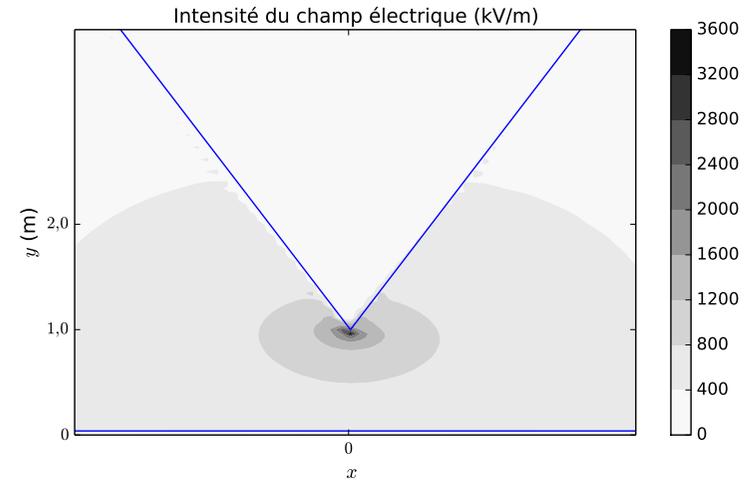
□ **Q 59** - $E_\theta(r, \beta/2) = 0$. Le plan d'équation $\theta = \beta/2$ est un plan de symétrie de la distribution de charges ; en un point de ce plan ; le champ électrique est contenu dans ce plan et donc selon la direction radiale.

$E_r(r,0) = E_r(r,\beta) = 0$; les plans $\theta = 0$ et $\theta = \beta$ sont des équipotentiels, le champ électrique en un point de ces plans est nécessairement perpendiculaire à ces plans et donc selon \vec{u}_θ .

□ **Q 60** - Pour une pointe $(\pi/\beta - 1) < 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} |\vec{E}| = +\infty$. Dans le cas d'une pointe, on observe une divergence de la norme du champ électrique qui peut donc dépasser la valeur du champ disruptif.

Remarque : dans les cas réalistes, le champ électrique ne diverge pas, mais tend vers une valeur très grande car l'extrémité de la pointe contient toujours quelques atomes et n'est pas un point au sens mathématique du terme.

□ **Q 61** - Les lignes de champ se resserrent au voisinage de la pointe, il apparaît clairement que le champ électrique est plus important au voisinage de la pointe, ce qui est confirmé par le resserrement des équipotentiels au voisinage de la pointe.



III. Propagation et milieu transparent

□ **Q 62** - Appliquons le pfd, il vient :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - m_e \Gamma \vec{v} - e\vec{E}$$

□ **Q 63** - Comme il s'agit d'une onde plane, le champ magnétique associé est de la forme :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}$$

Ainsi la composante magnétique de la force de Lorenz est de la forme :

$$\|\vec{F}_{mag}\| = \|-e\vec{v} \wedge \vec{B}\| = \frac{v}{c} \|\vec{F}_{elec}\|$$

Ainsi pour un électron non-relativiste la force magnétique est négligeable.

□ **Q 64** - En utilisant la notation complexe avec $\vec{v} = j\omega \vec{r}$:

$$m_e j\omega \vec{v} = -m_e \omega_0^2 \frac{\vec{v}}{j\omega} - m_e \Gamma \vec{v} - e \vec{E}$$

On obtient alors :

$$\vec{v} = \frac{-e \vec{E} / m_e}{j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega} - \Gamma}$$

□ **Q 65** - La vitesse est inversement proportionnelle à la masse. Les noyaux étant beaucoup plus massiques que les électrons, leur mouvement sera beaucoup plus faible.

□ **Q 66** - La densité d'électrons est de : $2 \times n^*$ car il y a deux électrons optiquement actifs. Par définition :

$$\vec{j} = 2n^*(-e)\vec{v}$$

En remplaçant la vitesse il vient :

$$\vec{j} = 2n^* e^2 / m_e \frac{i\omega}{i\omega + \frac{\omega_0^2}{i\omega} - \Gamma} \vec{E}$$

On obtient bien la forme désirée avec $\kappa = 2$.

□ **Q 67** - Déterminons les limites hautes et basse fréquences :

$$\gamma \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$$

$$\gamma \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

On en déduit qu'il s'agit d'un filtre passe-bande. D'après l'écriture, la pulsation de résonance est ω_0 , on en déduit que :

$$\gamma_0 = \frac{2n^* e^2}{m_e \Gamma}$$

□ **Q 68** - La fonction de transfert d'un filtre passe bande est est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + iQ(\omega/\omega_c - \omega_c/\omega)}$$

Par définition de l'énoncé :

$$\underline{H} = \frac{i\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

Divisons donc numérateur et dénominateur par $i\Gamma\omega$:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + i\left(\frac{\omega}{\Gamma} - \frac{\omega_0^2}{\Gamma\omega}\right)}$$

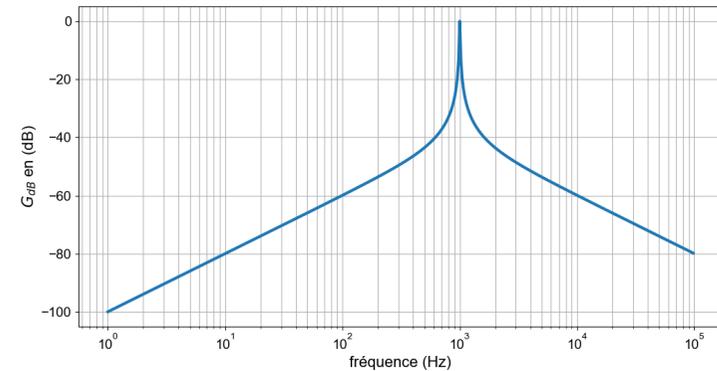
Par identification :

$$1/\Gamma = Q/\omega_c \quad \text{et} \quad Q\omega_c = Q\omega_0^2/\Gamma$$

On obtient alors :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

Avec un facteur de qualité de 100, le diagramme de Bode est de la forme suivante :



□ **Q 69** - Les équations de Maxwell suivantes sont inchangées :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (\text{MG})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{MT})$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF})$$

L'équation de Maxwell Ampère devient :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On en déduit avec le double rotationnel que :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i \varepsilon_0 \omega}\right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On obtient alors

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\gamma}{i \varepsilon_0 \omega}$$

□ **Q 70** - Avec les approximations de l'énoncé :

$$\gamma \rightarrow \gamma_0$$

On en déduit que :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\gamma_0}{i \varepsilon_0 \omega} = 1 + \frac{2n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}$$

□ **Q 71** - La vitesse d'une onde est donnée par identification dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{c^2}$$

On en déduit que

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1 + \frac{n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}$$

□ **Q 72** - Pour un gaz parfait :

$$PV = nRT \quad \text{soit} \quad P = \frac{n^*}{\mathcal{N}_A} RT = n^* k_B T$$

On obtient alors :

$$n = 1 + \frac{P e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2 k_B T}$$

□ **Q 73** - Par différence, on obtient :

$$n - n_0 = \frac{e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2 k_B T} (P - P_0)$$

On en déduit que

$$a = \frac{e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2 k_B T}$$