

DS 5

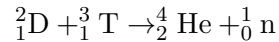
Présentation générale

- Pour un objectif **CCinP**, vous traiterez les questions 1 à 37.
- Pour un objectif **Centrale-Mines**, vous traiterez les questions 14 à 48.

En cas de panique, vous pouvez évidemment répondre aux questions 1 à 37. En revanche, toute réponse apportée aux questions 1 à 13 entraîne la nullité des réponses 37 à 48.

Pour répondre à la raréfaction des énergies fossiles, il est nécessaire de trouver de nouvelles sources d'énergie décarbonées. Parmi celles-ci, la fusion thermonucléaire est une des pistes à long terme qui donne lieu à une coopération internationale sans précédent avec le projet de recherche ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), dont les installations sont implantées à Cadarache, dans les Bouches-du-Rhône.

La fusion thermonucléaire consiste à faire entrer en collision deux noyaux légers pour obtenir un noyau plus lourd. Cette réaction nucléaire libère de grandes quantités d'énergie du fait qu'une partie de la masse des noyaux est convertie en énergie. Les efforts de recherche portent actuellement sur une réaction nucléaire impliquant deux isotopes de l'hydrogène : le deutérium ${}^2_1\text{D}$ et le tritium ${}^3_1\text{H}$. La réaction nucléaire produit un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$ et un neutron selon l'équation de réaction :



Dans un réacteur de fusion, la matière est à l'état de plasma. On appelle plasma un état de la matière constitué d'ions, d'électrons libres et d'espèces neutres. Cet état résulte des très hautes températures atteintes dans le réacteur qui permettent l'ionisation des atomes.

Données numériques

- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,4 \cdot 10^{23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

I. Confinement magnétique du plasma

Les plasmas créés pour réaliser la fusion thermonucléaire ayant des températures extrêmement élevées, ceux-ci ne peuvent être au contact direct de la paroi du réacteur qui fondrait ou serait fortement endommagée. Pour contenir ces plasmas, on doit donc réaliser un confinement immatériel : la méthode la plus étudiée à ce jour est le confinement magnétique. On se propose dans cette partie d'en comprendre le principe par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse m et de charge électrique $+e$ (le cas d'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

1 - Confinement dans $\vec{B}$ stationnaire et uniforme

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe (Oz) orienté par le vecteur unitaire noté $\vec{e}_z$ ou $\vec{u}_z$, constitué de N spires de rayon a , régulièrement réparties sur une longueur $d \gg a$. Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité I constante (**figure 1**).

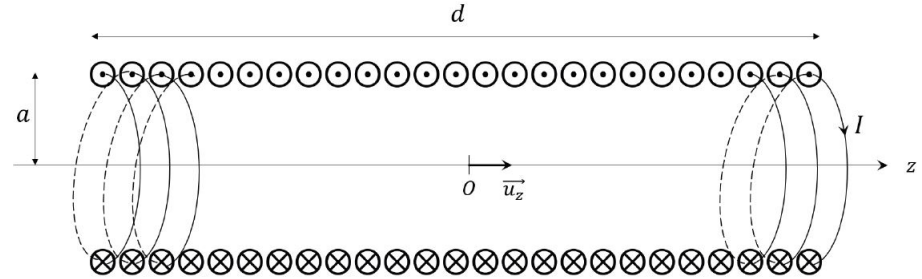


Figure 1 - Schéma du solénoïde. Seules quelques spires sont représentées par souci de lisibilité

□ **Q 1** - Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est de la forme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, avec B_0 une constante qu'on exprimera, entre autres, en fonction de l'intensité I . On admettra que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde et on négligera les effets de bord.

On s'intéresse maintenant au mouvement d'un cation de masse m et de charge électrique $+e$ à l'intérieur de ce solénoïde, soumis au champ $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

□ **Q 2** - Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera v_0 la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose d'abord que le cation a un mouvement dans un plan perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

□ **Q 3** - Représenter sur un schéma le vecteur vitesse $\vec{v}$ du cation, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique $\vec{F}_m$. Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère de Frenet.

□ **Q 4** - Donner l'expression de l'accélération du cation dans le repère de FRENET en fonction de sa vitesse v_0 et du rayon de courbure r de la trajectoire. Montrer que la trajectoire du cation est circulaire, de rayon $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ appelé

rayon de LARMOR, avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ la pulsation cyclotron.

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale v_0 parallèle au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

□ **Q 5** - En projetant le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{e}_z$, montrer que la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{e}_z$ est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné ?

Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique : la trajectoire est alors hélicoïdale.

□ **Q 6** - Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (**figure 2**), qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales. Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale ?

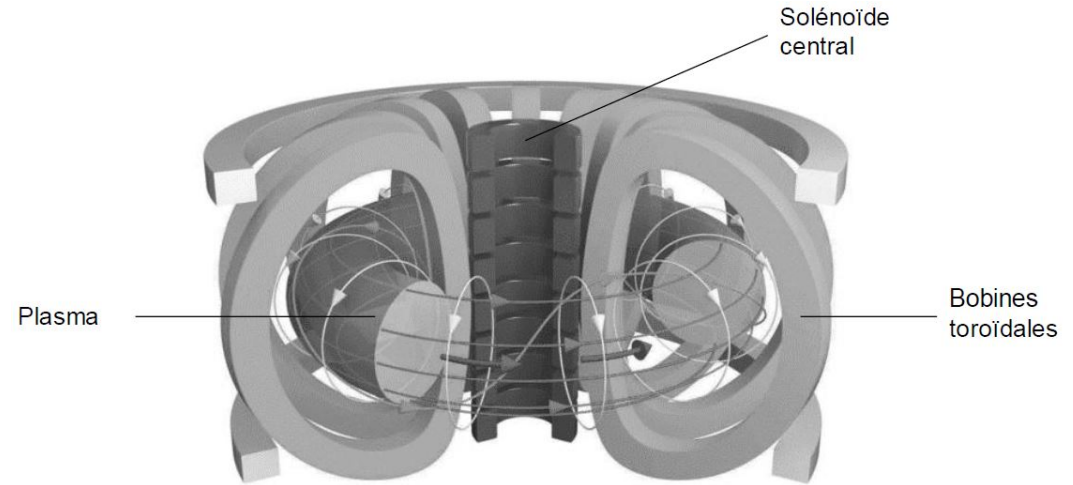


Figure 2 - Schéma d'un tokamak

□ **Q 7** - Calculer le rayon de LARMOR d'un cation d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$ (masse $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$ kg) de vitesse $v_0 = 3 \cdot 10^5$ m·s⁻¹ dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique $B_0 = 12$ T. Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale.

2 - Bouteille magnétique

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une "bouteille magnétique", qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la **figure 3**.

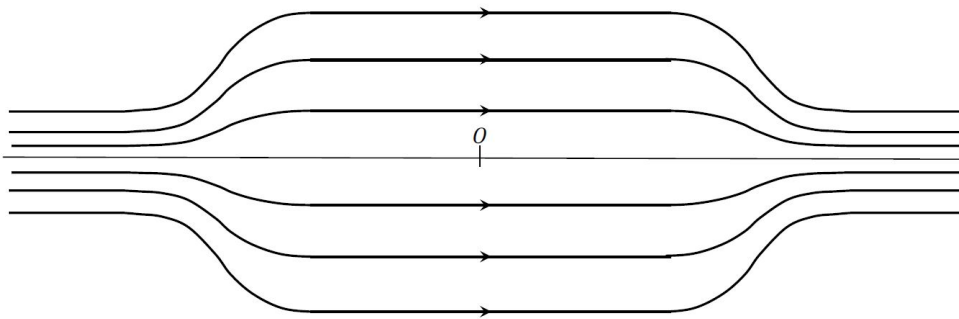


Figure 3 - Lignes de champ d'une bouteille magnétique

□ **Q 8** - Comment évolue qualitativement l'intensité du champ magnétique lorsqu'on se rapproche des bords de la bouteille magnétique (c'est-à-dire lorsque $|z|$ augmente)? Représenter graphiquement l'allure de la norme du champ magnétique $B(z)$ sur l'axe (Oz) .

On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse m dans cette bouteille magnétique autour de l'axe (Oz) . Son vecteur vitesse est $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, où $\vec{v}_\perp$ désigne la vitesse dans le plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$, et $\vec{v}_\parallel$ la vitesse selon $\vec{e}_z$.

□ **Q 9** - Rappeler, schéma à l'appui, la définition du moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une boucle de courant plane.

□ **Q 10** - Au voisinage de l'axe (Oz) , le champ magnétique est localement uniforme et orienté selon $\vec{e}_z$: $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Dans cette question, on suppose comme dans la **Q4** que le mouvement du cation est circulaire, uniforme et de vitesse $v_\perp$, perpendiculairement au champ magnétique. Montrer que le moment magnétique $\vec{\mu}$ associé au cation a pour expression :

$$\vec{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\vec{e}_z$$

L'expression du moment magnétique établie à la **Q10** reste en première approximation valable malgré les déplacements du cation selon l'axe (Oz) . En outre, on peut montrer que ce moment magnétique reste constant au cours du mouvement. Ainsi, le cation peut être assimilé à un dipôle magnétique rigide se déplaçant selon l'axe (Oz) , auquel on associe une énergie potentielle de la forme $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

□ **Q 11** - Montrer que $E = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + E_p$ est une constante. Quelle signification physique peut-on donner aux termes $\frac{1}{2}mv_\parallel^2$ et E du point de vue du dipôle magnétique?

□ **Q 12** - Tracer l'allure de $E_p(z)$. Discuter qualitativement les différents mouvements possibles du cation dans la bouteille magnétique en fonction de la valeur de E (états libres ou états liés). Dans quel cas peut-on dire que la bouteille magnétique se comporte comme un "miroir magnétique", c'est-à-dire que le cation repart dans la direction opposée sur les bords de la bouteille?

□ **Q 13** - Quel défaut présente la bouteille magnétique pour le confinement du plasma?

II. Échauffement du plasma

Pour rendre possible la fusion, il faut vaincre la barrière coulombienne qui s'oppose au rapprochement des deux noyaux d'hydrogène. C'est la raison pour laquelle il est préalablement nécessaire d'échauffer le plasma jusqu'à ce que les réactions de fusion s'initient. L'objectif est ensuite d'atteindre le seuil d'ignition, c'est-à-dire le moment où l'énergie libérée par les réactions de fusion suffit à maintenir la température nécessaire à la fusion.

1 - Température à atteindre pour initier la fusion

La question suivante nécessite une prise d'initiative en modélisant la situation proposée. Il est attendu de préciser chaque notation introduite, d'explicitier les hypothèses effectuées, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique.

□ **Q 14** - La taille typique des noyaux d'hydrogène est de 10^{-15} m. En raisonnant dans le cadre de la mécanique classique, estimer l'ordre de grandeur de la température nécessaire pour que les réactions de fusion démarrent.

□ **Q 15** - La température à atteindre est en fait de l'ordre de 150 millions de degrés. Quel phénomène quantique est à l'origine de l'écart avec la température obtenue à la question précédente?

2 - Chauffage ohmique par induction

Dans les tokamaks (**figure 2**) une partie de l'échauffement est réalisé par induction. Un solénoïde situé au centre du tokamak produit un champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps. Le plasma, de géométrie torique, entoure ce solénoïde central : il est alors parcouru par un intense courant induit qui, par effet JOULE, chauffe le plasma. On se propose de modéliser sommairement cette situation. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Le solénoïde central d'axe (Oz) , de rayon a_1 , est parcouru par un courant $i_1(t)$ qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1$ tel que $\vec{B}_1(r < a_1, t) = \beta i_1(t) \vec{e}_z$ (avec β constant) et $\vec{B}_1(r > a_1, t) = \vec{0}$. Le plasma est assimilé à une boucle de courant filiforme parcourue par $i_2(t)$, de même axe que le solénoïde central et de rayon $a_2 > a_1$ (**figure 7**).

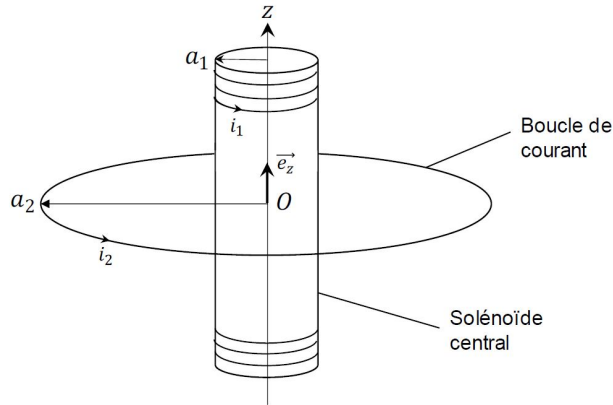


Figure 7 - Représentation schématique du système solénoïde central – plasma dans le tokamak

□ **Q 16** - Exprimer l'inductance mutuelle M entre le solénoïde central et la boucle de courant, en fonction de β et de a_1 . Calculer M pour le tokamak ITER, sachant que $a_1 = 2$ m et que le champ magnétique au centre du solénoïde est de 13 T pour un courant maximal de 46 kA.

On modélise l'interaction entre le solénoïde et le plasma par le circuit électrique représenté **figure 8**. Le solénoïde central, d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 , est parcouru entre $t = 0$ et $t = t_1$ par le courant $i_1(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$ avec I_0 et t_1 des constantes. La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance R_2 et pour inductance propre L_2 ; elle est parcourue par le courant $i_2(t)$.

À $t < 0$, le courant i_2 est nul. M est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

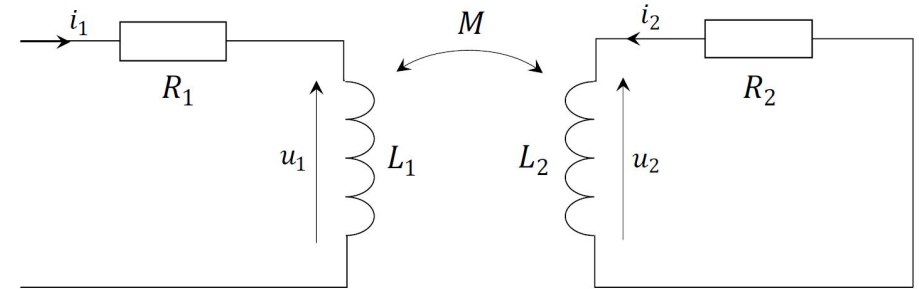


Figure 8 - Circuit équivalent au système solénoïde central – plasma

□ **Q 17** - Montrer que $i_2(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec τ_1 et τ_2 qui seront exprimés en fonction de L_2 , R_2 , M et de t_1 .

□ **Q 18** - En déduire $i_2(t)$. En supposant $t \ll \tau_2$, simplifier cette expression par un développement limité au premier ordre en t/τ_2 .

□ **Q 19** - Exprimer l'énergie reçue par R_2 entre $t = 0$ et $t = t_1$ en fonction de R_2 , L_2 , M , I_0 et de t_1 , en supposant que $t_1 \ll \tau_2$. Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?

□ **Q 20** - Le physicien américain Lyman SPITZER a établi en 1950 que la résistivité ρ d'un plasma soumis à un champ magnétique dépendait de la température T du plasma proportionnellement à $T^{-3/2}$. À partir de cette information, quelle critique peut-on émettre sur la modélisation effectuée dans cette partie ?

III. Diffusion Thermique

1 - Le coeur du réacteur

Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est représenté cf. fig. 1. Le réacteur chauffe une certaine quantité d'eau qui circule, en boucle fermée,

dans le circuit *primaire*. L'eau du circuit primaire permet de vaporiser l'eau contenue dans le circuit *secondaire* dont la circulation assure la rotation de turbines couplées à des alternateurs. Le circuit *tertiaire* est utilisé pour liquéfier l'eau du circuit secondaire en sortie des turbines, avant qu'elle ne soit à nouveau injectée dans les générateurs de vapeur.

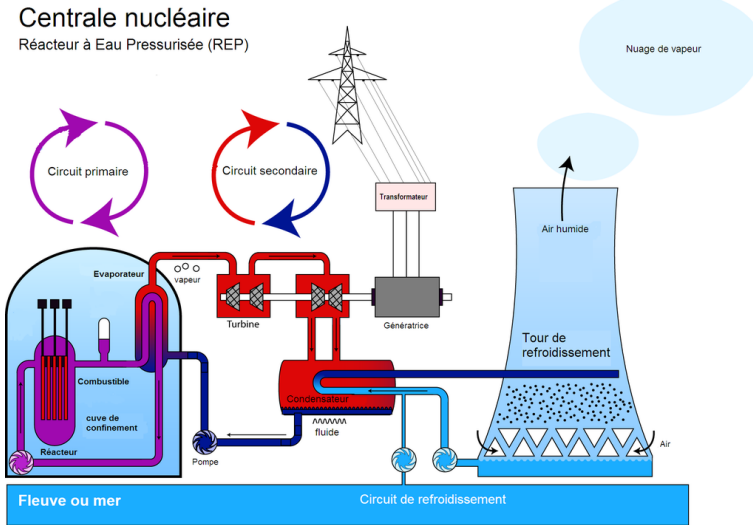


FIGURE 1 – Principe d'une centrale nucléaire (source : Wikipedia)

Au coeur d'une tranche de centrale (qui comporte en général 2 ou 3 tranches), le combustible nucléaire est sous forme de pastilles cylindriques. Ces pastilles sont regroupées en *crayons*, eux-même réunis en *assemblages* (cf. fig. 2). Un assemblage contient 600 kg de dioxyde d'uranium enrichi. Un coeur de réacteur est l'association de 241 assemblages.

Données :

- réseau assemblage carré 17×17 crayons
- nombre de crayons de combustible : 265
- diamètre d'un crayon 9,5 mm
- épaisseur de la gaine d'un crayon 0,57 mm
- nombre d'assemblages 241 par coeur
- masse d'UO₂ par assemblage 600 kg

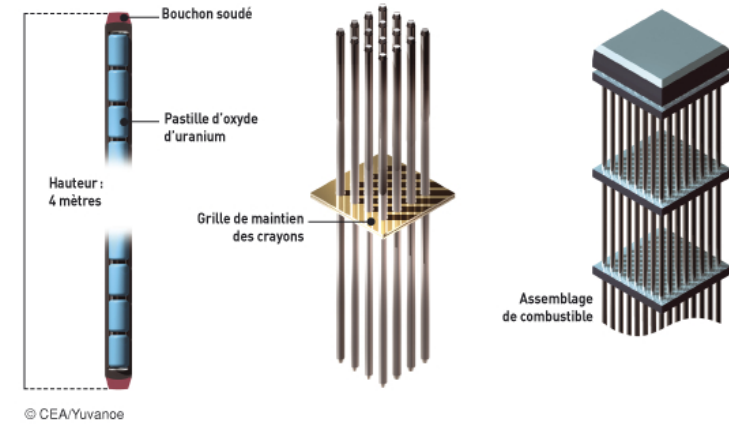


FIGURE 2 – Assemblage du combustible au coeur d'une centrale

- Combustible (dioxyde d'uranium)
- conductivité thermique moyenne $5,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- température de fusion du combustible nucléaire 2865°C
- température de l'eau au voisinage du combustible 332°C
- densité de courant thermique d'un crayon : $156 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$.
- Puissance linéaire en fonctionnement nominale : $470 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1}$.

2 - Quelques analyses préliminaires

- **Q 21** - Pourquoi produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres prêts à mettre dans la gaine du crayon ? Quel est l'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustibles plutôt que quelques-uns, plus gros ?
- **Q 22** - Un assemblage est un quadrillage de 17×17 emplacements. Or, il ne contient que 265 crayons de combustible. À quoi peuvent servir les autres emplacements ?
- **Q 23** - Vérifier que la surface totale d'échange entre l'eau du circuit primaire et les crayons indiquée dans les données (environ 8000 m^2) est cohérente avec la structure du coeur du réacteur.

3 - Approche théorique

a) Modélisation

On modélise *un* crayon radioactif par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R dans lequel les réactions nucléaires produisent une puissance volumique uniforme. Le régime est considéré stationnaire.

On utilise le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : (r, θ, z) .

□ **Q 24** - Justifier que la température est une fonction de r uniquement. Que peut-on en déduire sur la densité de courant thermique $\vec{j}$?

□ **Q 25** - La figure 3 présente quatre profils de température à l'intérieur du crayon, ainsi que les expressions analytiques de $T(r)$ associées (pour chacune de ces expressions, la constante K est une constante positive). Parmi ces profils, quel est le seul susceptible de correspondre au crayon radioactif étudié ? Justifier votre réponse à partir d'arguments qualitatifs uniquement (sans aucun calcul).

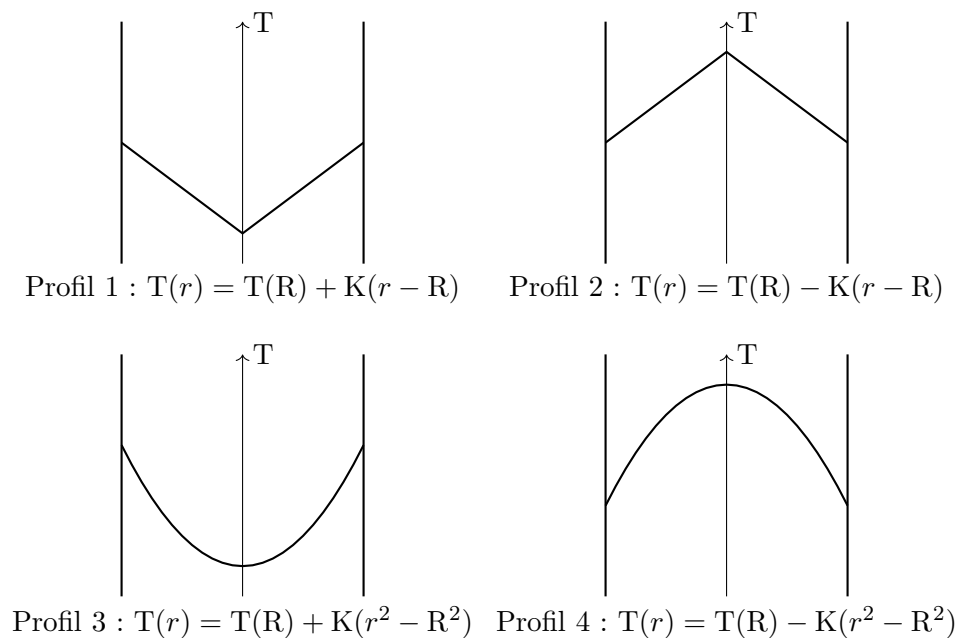


FIGURE 3 – Profils de température.

□ **Q 26** - En admettant que le profil identifié représente réellement le champ

de température à l'intérieur du crayon, relier la constante K aux grandeurs physiques pertinentes dont les valeurs numériques sont données en fin d'énoncé.

□ **Q 27** - À l'aide des caractéristiques du coeur données, proposer une estimation de la puissance volumique libérée dans le combustible lorsque le réacteur est en fonctionnement nominal.

□ **Q 28** - Proposer une définition plausible de la *puissance linéique*. Confirmer (ou non) cette définition par un calcul d'ordre de grandeur. Comment expliquer l'existence d'une puissance linéique maximale ?

□ **Q 29** - En supposant que la température en $r = R$ est celle de l'eau au voisinage des crayons, calculer numériquement la température au coeur du crayon (en $r = 0$). Commenter.

b) Amélioration du modèle

□ **Q 30** - Pourquoi la température en $r = R$ ne vaut-elle pas exactement la température de l'eau indiquée dans les données ?

□ **Q 31** - Cette question nécessite une prise d'initiative de la part du candidat. À l'aide d'une démarche à préciser (une page maximum), proposer un modèle conduisant à une meilleure estimation de la température au coeur du crayon en tenant compte du constat précédent. Ne pas hésiter, pour cela, à introduire les grandeurs physiques pertinentes en proposant, le cas échéant, des ordres de grandeur raisonnables.

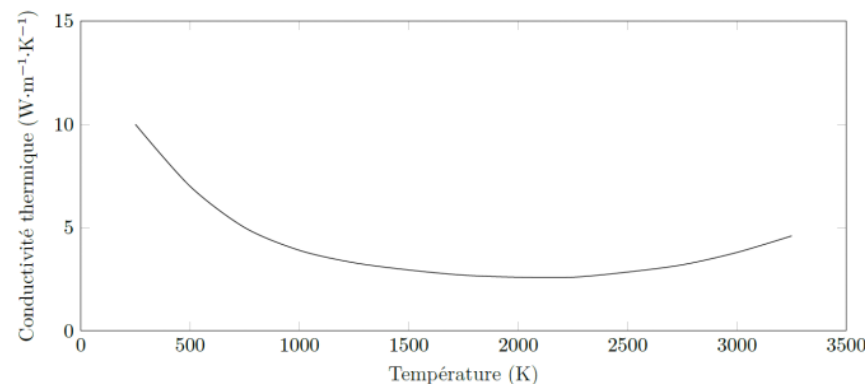


FIGURE 4 – Conductivité thermique

□ **Q 32** - En réalité, la conductivité thermique du dioxyde d'uranium n'est pas indépendante de la température mais possède le profil donné cf. fig. 4. Expliquer, de manière qualitative mais argumentée, de quelle manière est modifié le profil de température et, en particulier, si on peut s'attendre à une température plus élevée ou plus basse que celle calculée précédemment.

4 - Diffusion le long d'un crayon

On considère désormais la diffusion le long d'un crayon considéré comme un cylindre homogène de rayon a et de longueur $2 \times L$. Le tout est plongé dans l'air considéré comme un thermostat à la température T_{ext} . On supposera le gradient radial de température suffisamment faible pour que dans la section droite d'abscisse x la température $T(x,t)$ soit uniforme. On appellera μ la masse volumique, c sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique.

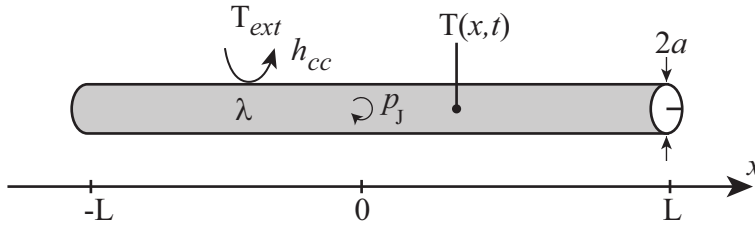


FIGURE 5 – Notations

En fonctionnement, les réactions nucléaires génèrent une puissance p_J par unité de volume. On note h_{cc} le coefficient conducto-convectif à travers la surface latérale de sorte que la loi de Newton pour l'interface accumulateur-fluide s'écrive :

$$\vec{j} = h_{cc}(T(x,t) - T_{ext})\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur normal à la surface latérale.

□ **Q 33** - À partir d'un bilan d'énergie sur un système judicieusement choisi, montrer que l'équation vérifiée par la température est donnée par :

$$\mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2h_{cc}}{a}(T_{ext} - T(x,t)) + p_J$$

□ **Q 34** - Simplifier l'équation précédente en régime stationnaire, on fera apparaître les grandeurs $H = \sqrt{\frac{a\lambda}{2h_{cc}}}$ et $T_{max} = T_{ext} + \frac{p_J a}{2h_{cc}}$

□ **Q 35** - Quelle est la signification physique de la grandeur H ?

□ **Q 36** - On admet que $T(x = \pm L) = T_{ext}$. En déduire que le profil de température peut se mettre sous la forme suivante

$$T(x) = A \cosh(x/H) + B$$

où A et B seront des constantes exprimées en fonction de H , L , T_{ext} et T_{max} .

□ **Q 37** - Commenter les courbes fournies fig.6 au regard des expressions de H et T_{max} .

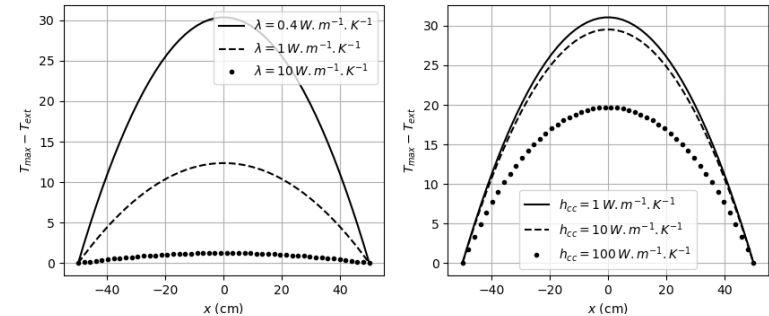


FIGURE 6 – Profils de température pour une même puissance volumique p_J , à coefficient h_{cc} fixé (gauche) et λ fixé (droite).

IV. Effet dynamo

D'après Mines 19

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique $\vec{m}$ de norme constante m , la direction du vecteur $\vec{m}$ étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur $\vec{e}_r$ local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 7).

□ **Q 38** - Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

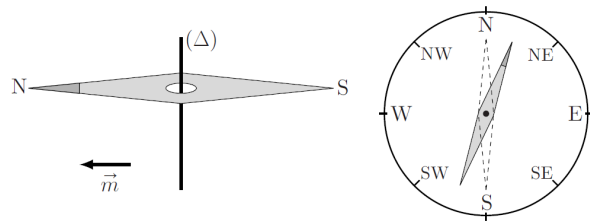


FIGURE 7 – Boussole de navigation.

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) ; légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

□ **Q 39** - Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 7). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques ϕ (longitude) et $\lambda = \pi/2 - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

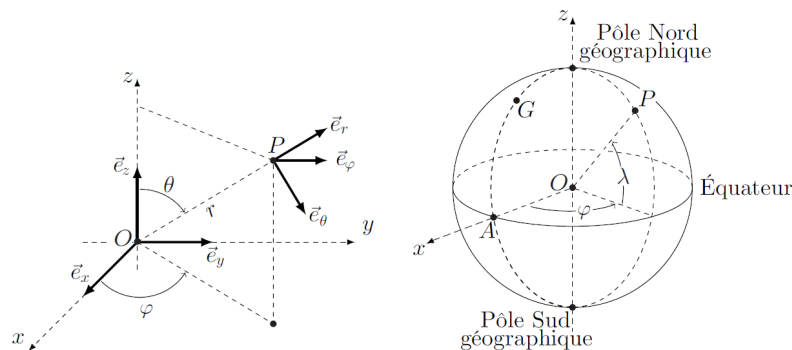


FIGURE 8 – Coordonnées sphériques et géographiques.

□ **Q 40** - Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées

sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .

□ **Q 41** - Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle nord magnétique local la direction $\vec{e}_N$ du champ géomagnétique $\vec{B}$, projeté dans le plan horizontal, et déclinaison magnétique l'angle D formé par $\vec{B}$ avec le nord magnétique local ; la déclinaison magnétique est positive si $\vec{B}$ est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ **Q 42** - Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles » ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

Données :

- Le champ magnétique terrestre à l'équateur vaut : $B_E = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
- Le rayon terrestre vaut : $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$
- Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire $\vec{M}$ placé en O est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - \vec{R}^2 \vec{M}}{R^5}$$

où $\vec{R} = \vec{OP}$ et $R = ||\vec{R}||$.

- Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire $\vec{M}$ plongé dans un champ $\vec{B}$ sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\Gamma = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau métallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (cf. fig. 9). Le système comporte N spires (circulaires de rayon a , de centre O et d'axe (Oz) , qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon $b < a$, qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega(t)$ et le moment d'inertie I (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru

par le même courant $i(t)$ que les spires ; il est aussi entraîné par la rotation de la Terre avec un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$. Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée R .

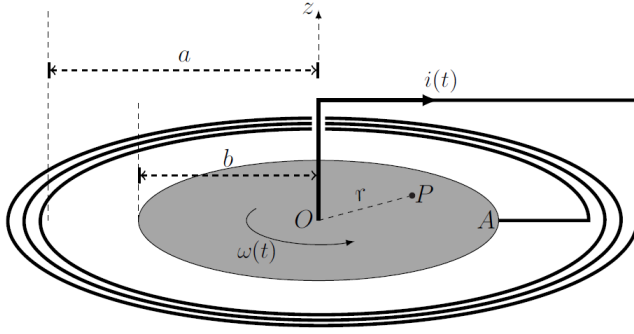


FIGURE 9 – Le modèle autodynamo pour le champ géomagnétique

On note $\vec{B}(P)$ le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P du disque tournant, avec $r = OP$; on supposera $N \gg 1$. Si $i(t) \neq 0$, on note $M_{rmax} = -\frac{1}{i(t)} \int_0^{rmax} \vec{e}_z \cdot \vec{B}(P) r dr$;

en particulier on pourra utiliser dans ce qui suit les intégrales M_a et M_b pour $r_{max} = a$ ou b respectivement.

□ **Q 43** - Quelle est la direction de $\vec{B}(P)$? Quels sont les signes de M_a et M_b ? Comparer M_a et M_b . Expliciter l'inductance propre L du circuit électrique de la figure 9 en fonction notamment d'une de ces intégrales.

□ **Q 44** - On suppose d'abord que le courant $i(t)$ traverse le disque uniquement en ligne droite du point A de sa périphérie à O . Exprimer la force de Laplace $d\vec{F}_L$ s'exerçant sur un élément de longueur du segment AO . Exprimer alors le moment $\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{e}_z$ des forces de Laplace exercées sur ce disque en fonction de $i(t)$ et M_b . Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de A à O , on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

□ **Q 45** - En faisant l'hypothèse de la conservation de la puissance lors de la conversion électro-mécanique, relier la force électro-motrice $e(t)$ induite par les mouvements de rotation du disque M_b , $i(t)$ et $\omega(t)$. On admettra que

$$\mathcal{P}_{meca} + \mathcal{P}_{elec} = 0$$

□ **Q 46** - Établir les équations régissant les évolutions du courant dans le

noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = i(t)(\alpha\omega(t) - \beta) \\ \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \delta i^2(t) \end{cases}$$

On exprimera les constantes positives en fonction de R , L , M_b , I et Γ_0 .

Soit i_0 un courant constant arbitraire, on considère la fonction

$$\mathcal{H}(\omega, i) = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} L i^2 - \frac{L \Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{I R}{M_b} \omega$$

□ **Q 47** - Calculer $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ et simplifier son expression. Comment peut-on interpréter la fonction $\mathcal{H}$? Déterminer les points du plan (ω, i) pour lesquels le gradient de $\mathcal{H}$ s'annule. Comment s'interprètent ces points ?

□ **Q 48** - Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure ci-dessous.

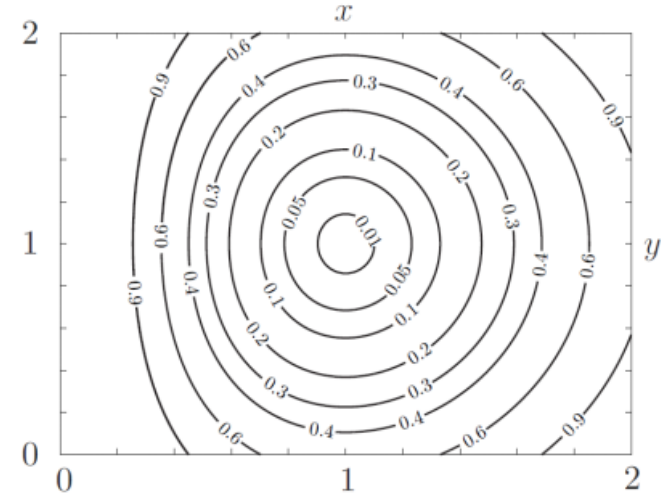
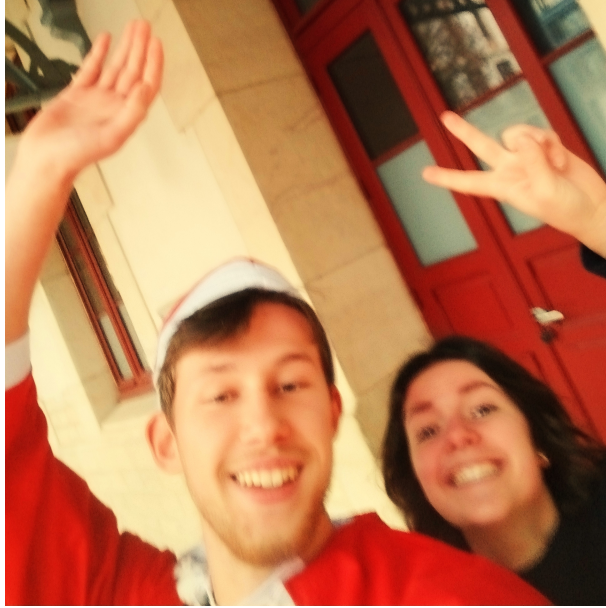


FIGURE 3 – Courbes de valeurs constante définies par la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \ln(x) - y = c$. Les valeurs de c sont indiquées sur les courbes.

Bon courage à tous!

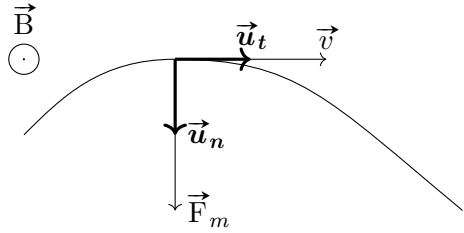


I. Confinement magnétique du plasma

□ **Q 1** - C'est la démonstration du cours, en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire. On trouve $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{d} I \vec{e}_z$.

□ **Q 2** - Par définition, la puissance de la force magnétique est $\mathcal{P} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$. Or la force magnétique s'écrit $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ donc est orthogonale à la vitesse : sa puissance est donc nulle. D'après le théorème de la puissance cinétique, si la force magnétique est la seule force extérieure, l'énergie mécanique se conserve (donc la norme de la vitesse est constante – mais pas sa direction).

□ **Q 3** - La base de Frenet est constitué du vecteur $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de la vitesse, et du vecteur $\vec{u}_n$ orthogonal à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.



□ **Q 4** - Dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$.

Or ici la norme de la vitesse est constante donc $\vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n$.

Par application du PFD (seule la projection sur $\vec{u}_n$ est non nulle), on obtient :

$$m \vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n = +e \vec{v} \wedge \vec{B} = ev_0 B_0 \vec{u}_n$$

Les facteurs v_0 , B_0 , e et m sont constants, donc le rayon de de courbure l'est aussi et vaut $r_L = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{eB_0}{m}$. La trajectoire est donc **circulaire**.

□ **Q 5** - Si $\vec{B}$ est selon $\vec{e}_z$, alors la force magnétique est orthogonale à $\vec{e}_z$. Il n'y a aucune accélération selon $\vec{e}_z$ donc la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{e}_z$ est constante. Si la vitesse initiale vaut v_0 et est selon $\vec{e}_z$ alors

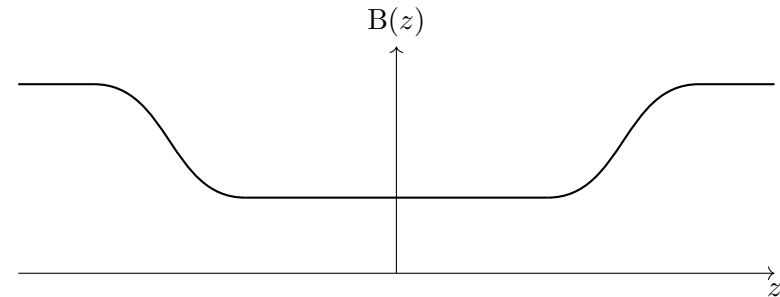
la force magnétique est constamment nulle et le mouvement est rectiligne. La particule part alors vers $z \rightarrow \infty$: le mouvement n'est pas confiné.

□ **Q 6** - D'après ce qui précède, la particule chargée décrit une hélice suivant l'axe du champ magnétique. Dans cette configuration toroïdale, cet axe est en fait replié sur lui-même, formant une boucle : la particule est désormais confinée dans le dispositif.

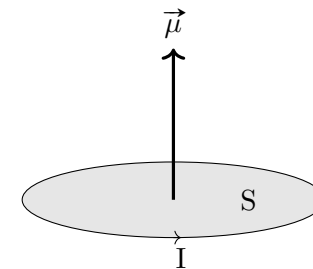
□ **Q 7** - AN $r_L \approx 1$ mm. Ce rayon est très petit devant les dimensions du dispositif.

1 - Bouteille magnétique

□ **Q 8** - Sur les bords de la bouteille magnétique, les lignes de champ sont plus serrées donc le champ est plus intense (la justification n'est pas demandée, mais ceci est dû à la conservation du flux magnétique car $\text{div} \vec{B} = 0$).



□ **Q 9** - Par définition, le moment magnétique d'une boucle de courant plane est $\vec{\mu} = IS \vec{n}$ où I est le courant qui la parcourt, S la surface délimitée par la boucle, et $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface, orienté positivement par rapport au courant.

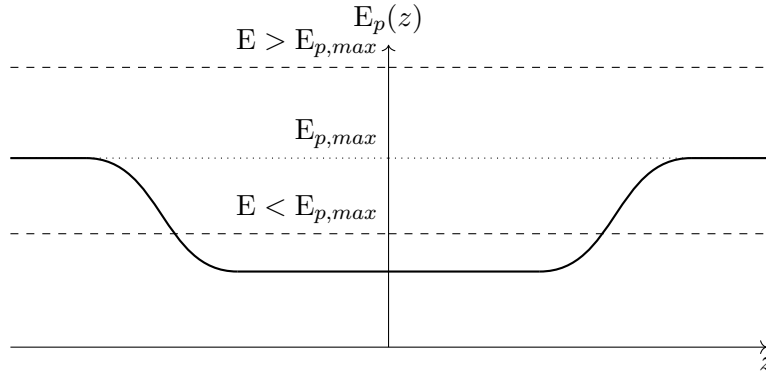


□ **Q 10** - Calculons d'abord le courant. Comme le proton fait un tour par période, le courant vaut $I = \frac{e}{T} = e \frac{v_{\perp}}{2\pi r_L}$. Mais en reprenant le schéma de la **Q3**, on constate que le mouvement se fait dans le sens inverse du sens trigonométrique. Comme la surface vaut $S = \pi r_L^2$, on obtient :

$$\vec{\mu} = -\pi r_L^2 e \frac{v_{\perp}}{2\pi r_L} \vec{e}_z = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \vec{e}_z$$

□ **Q 11** - $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$. Ainsi, $E = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + E_p$ n'est autre que l'**énergie cinétique totale de la particule**, dont on a démontré qu'elle était constante. $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ est son énergie cinétique pour son mouvement selon l'axe. Si on interprète ceci du point de vue du dipôle se déplaçant selon (Oz), $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ est son énergie cinétique et E son énergie mécanique. On s'est ramené à un problème à 1D selon (Oz).

□ **Q 12** - $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = +\mu B(z)$ car $\vec{\mu}$ est constant et orienté selon $-\vec{e}_z$. Le profil est donc proportionnel à celui dessiné plus haut.



Si $E < E_{p,max}$, comme $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \geq 0$, seule la zone où $E > E_p$ est accessible : la particule est confinée, dans un état lié. Elle est réfléchiée à chaque extrémité. Sinon (si $E > E_{p,max}$) elle est dans un état libre.

□ **Q 13** - Si $E > E_{p,max}$, c'est-à-dire si la particule est trop rapide, elle n'est plus confinée et peut s'échapper du dispositif.

□ **Q 14** - Pour que les réactions de fusion démarrent, il faut rapprocher 2 noyaux d'hydrogène à une distance de l'ordre de grandeur de leur rayon afin

que les forces nucléaires puissent jouer leur rôle. Pour cela, il faut vaincre la répulsion électrostatique, dont l'énergie potentielle est de la forme $\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec $q_1 = q_2 = e$. Partant de l'infini, l'énergie à fournir pour arriver à la distance $R \sim 10^{-15}$ m est donc $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$.

Si cette énergie est apportée sous forme thermique, il faut que $k_B T$ soit de cet ordre de grandeur, ce qui conduit à $T \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R k_B}$.

AN $T \sim 1,6.10^{10}$ K

□ **Q 15** - La température à atteindre est en fait plus faible que celle calculée : il n'est pas nécessaire de franchir complètement la barrière de potentiel car l'effet tunnel intervient. Rappelons qu'à courte distance ($r \simeq 10^{-15}$ m), les interactions nucléaires sont attractives entre les nucléons, il y a donc un puits de potentiel à cette échelle : si l'on franchit la barrière, les nucléons peuvent fusionner. On peut alors y voir le phénomène inverse de celui proposé par Gamov pour décrire la radioactivité alpha : l'énergie thermique nécessaire ne serait plus celle permettant d'atteindre le haut de la barrière de potentiel, mais simplement un point où cette barrière est franchissable par effet tunnel. Est-ce suffisant pour abaisser la température nécessaire d'un facteur 100 ?

2 - Chauffage ohmique par induction

□ **Q 16** - On calcule le flux du champ créé par la bobine à travers la spire : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Or le champ est uniforme pour $r < a_1$ et nul au-delà, donc $\Phi = \pi a_1^2 \beta i_1$.

Par identification avec la définition de M ($\Phi = M i_1$), on obtient $M = \pi a_1^2 \beta$

A.N. $\beta = \frac{B}{i_1} = \frac{13}{46.10^3}$ USI donc $M \approx 3,5.10^{-3}$ H.

□ **Q 17** - La loi des mailles dans le circuit 2 associée à la loi d'Ohm et à la loi de Faraday donne $e = R_2 i_2 = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt}$ avec $\Phi_{tot} = L_2 i_2 + M i_1$. On a donc :

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec $\tau_1 = t_1 \frac{L_2}{M}$ et $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$.

□ **Q 18** - La solution est de la forme $i_2(t) = A e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0$. Comme $i_2(0) = 0$, on a $i_2(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 (1 - e^{-t/\tau_2})$.

En supposant $t \ll \tau_2$, au premier ordre en t/τ_2 , on trouve $i_2(t) \approx \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0$.

□ **Q 19** - La puissance instantanée reçue par R_2 s'écrit $\mathcal{P}_2 = R_2 i_2^2$ donc en intégrant :

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^{t_1} R_2 \left(I_0 \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^2 dt = R_2 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^2 \frac{t_1^3}{3}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{R_2 M^2 I_0^2}{3 L_2^2} t_1$$

Cette énergie est reçue par le plasma et augmente sa température.

□ **Q 20** - Si la résistivité diminue, la résistance R_2 diminue donc le chauffage est moindre. De plus, R_2 évolue alors au cours du temps, au fur et à mesure que la température augmente.

II. Diffusion Thermique

□ **Q 21** - Les pastilles sont peut être plus facilement manipulables ? En augmentant le nombre de petits crayons, on augmente la surface pour un même volume. Il ya donc un chauffage plus efficace.

□ **Q 22** - Question originale dont je n'avais pas la réponse sans demander à google... Les 24 emplacements restants sont utilisés pour contrôler la réaction grâce à des matériaux absor- beurs de neutrons, indispensables pour éviter la divergence

□ **Q 23** - On a 241 assemblages de 265 crayons... La valeur de la hauteur est cachée dans la figure 4 ! Cela donne une surface de

$$S = 241 \times 265 \times \underbrace{\pi 9,5 \cdot 10^{-3} \times 4}_{S_{lat}} \approx 8000 m^2$$

□ **Q 24** - Le milieu est considéré comme semi-infini selon z . La densité de courant ne dépend que de r . L'invariance selon θ et z du cylindre limite les variables dont dépend j .

□ **Q 25** - L'élévation de température dans le matériau permet de supprimer les profils 1 et 3. La discontinuité de j en $r = 0$ est impossible avec des sources volumiques le profil 2 est impossible.

□ **Q 26** - En appliquant la loi de Fourier :

$$j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} = 2\lambda K r$$

Dans les données¹ : $j(D/2) = 157 \cdot 10^4 W \cdot m^{-2}$, on en déduit que :

$$K = 3,3 \cdot 10^7 K \cdot m^{-2}$$

□ **Q 27** - Pour un crayon la puissance vaut : $\mathcal{P} = j(R)\pi DH$. Soit une puissance volumique de :

$$p_{vol} = \mathcal{P}/\pi D^2/4H = 6,6 \cdot 10^8 W \cdot m^{-3}$$

□ **Q 28** - La puissance linéique est une grandeur par unité de longueur. On peut donc définir celle pour un crayon :

$$P_{Lin} = p_{vol} \times \pi D^2/4 = 46 \cdot 10^3 W \cdot m^{-1}$$

La valeur est bien similaire à celle fournie par l'énoncé. L'existence d'une valeur maximale doit être pour éviter la température de fusion du crayon...

□ **Q 29** - En utilisant le profil fourni :

$$T(0) = T(R) + KR^2 = 929^\circ C$$

Bon.... ça ne fond pas...

□ **Q 30** - Il s'agit certainement de la température loin du combustible, il faut donc tenir compte de la convection.

□ **Q 31** - En utilisant la loi de Newton, par continuité du flux :

$$j(R) = h(T(R) - T_{fluide})$$

Pour l'eau $h \sim 2000 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$, on en déduit que :

$$T(R) = T_{fluide} + \underbrace{\frac{j(R)}{h}}_{780} = 1112^\circ C$$

1. Les coquins donnent les valeurs par cm^2

□ **Q 32** - On remarque que la conductivité thermique diminue avec la température dans la gamme de fonctionnement. On en déduit que l'énergie se dissipera moins vite vers l'extérieur, la température sera donc plus importante.

□ **Q 33** - Démonstration classique. On considère une tranche infinitésimale de crayon comprise entre x et $x + dx$, l'application du premier principe à pression constante entre t et $t + dt$ sur cette tranche donne :

$$\mu c(T(x,t+dt) - T(x,t)) = j(x,t)\pi a^2 dt - j(x+dx,t)\pi a^2 dt - 2\pi a dx h(T(x,t) - T_{ext}) + p_{vol}\pi a^2 dx$$

L'utilisation de la loi de Fourier permet d'obtenir l'équation demandée.

□ **Q 34** - En régime stationnaire, on obtient, en divisant par λ :

$$\lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{2h_{cc}}{\lambda a}}_{1/H^2} T(x,t) = - \underbrace{\frac{2h_{cc}}{\lambda a} (T_{ext} + p_J/\lambda)}_{-T_{max}/H^2}$$

□ **Q 35** - H est la distance caractéristique d'évolution de la température.

□ **Q 36** - Résolution classique avec solution paire. On obtient :

$$A = \frac{T_{ext} - T_{max}}{\cosh L/H} \quad \text{et} \quad B = T_{max}$$

□ **Q 37** - Plus le coefficient h augmente plus la différence de température diminue car A diminue. De même lorsque λ augmente.

III. Effet dynamo

□ **Q 38** - Un moment magnétique est soumis à un couple $\vec{\gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ qui tend à aligner le dipole le long des lignes de champ. Ainsi à l'équilibre le vecteur $\vec{m}$ est orienté selon $\vec{B}$ ($\vec{\Gamma} = \vec{0}$). Cet équilibre est stable car il s'agit d'un couple de rappel : $\vec{\Gamma} = -mB \sin \theta \vec{e}_r$.

□ **Q 39** - En appliquant le TMC, il vient :

$$I\ddot{\theta} = -mB \sin \theta$$

Dans l'approximation des petits angles, cette équation devient :

$$I\ddot{\theta} + mB\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{mB}{I}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{I}} = \frac{2\pi}{\tau_{osc}}$$

Ainsi la connaissance de m, τ et I permet de mesurer la valeur de B dans le plan perpendiculaire à (Δ) .

□ **Q 40** - En utilisant les données fournies, avec $\vec{R} = R_T \vec{e}_r$ et $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z = M_0(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$, on en déduit que :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M_0 \cos \theta}{R_T^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0 \sin \theta}{R_T^3} \vec{e}_\theta$$

□ **Q 41** - Un moment dipolaire d'une boussole $\vec{m}$ s'oriente en pointant le nord, c'est à dire en s'orientant selon $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0 \sin \theta}{R_T^3} \vec{e}_\theta$. Le nord étant selon la direction $-\vec{e}_\theta$, on en déduit que $M_0 < 0$. Le champ à l'équateur est donné pour $\theta = \pi/2$, soit :

$$\vec{B}_E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_0}{R_T^3} \vec{e}_\theta$$

On en déduit que

$$M_0 = \frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} = 7,9.10^{24} \text{ A.m}^2$$

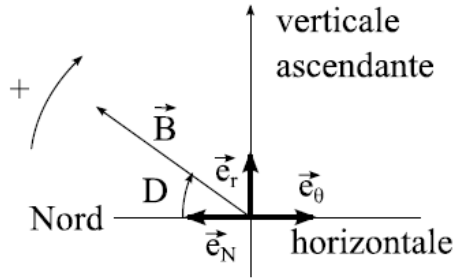
Au pôle nord : $\theta = 0$:

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M_0}{R_T^3} \vec{e}_r$$

On en déduit que le champ est vertical descendant au pôle nord et ascendant au pôle sud. Sa norme vaut alors :

$$B_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M_0}{R_T^3} = 6,0.10^{-5} \text{ T}$$

□ **Q 42** - Effectuons un schéma :



Le vecteur $\vec{E}_N$ est horizontal et dirigé vers le nord (donc opposé à $\vec{e}_\theta$). On en déduit que

$$\tan D = \frac{Br}{-B\theta} = 2 \cotan \theta < 0$$

Aux pôles, le champ magnétique est vertical, une boussole horizontale n'est donc plus soumise à un couple de rappel et peut tourner librement autour de sa liaison pivot.

Si le soleil est visible, au zénith, il est au sud dans l'hémisphère nord et au nord dans l'hémisphère sud.

□ **Q 43** - D'après l'orientation de la spire, $\vec{B}(P)$ est orienté selon $-\vec{e}_z$. Le produit scalaire est négatif, le signe (-) permet d'obtenir des grandeurs positives. Le flux propre est défini pour les N spires par :

$$\Phi = N \times \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a B(z) r dr d\theta = 2\pi N M_a i(t)$$

On en déduit que

$$L = 2\pi N M_a$$

□ **Q 44** - Par définition :

$$d\vec{F}_L = idr \vec{e}_r \wedge \vec{B} = -idr B \vec{e}_\theta$$

avec $B(P) = -B \vec{e}_z$.

Le couple est donné par :

$$d\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge d\vec{F}_L = -idr B \vec{e}_z$$

Par intégration, il vient :

$$\vec{\Gamma}_L = -i^2 M_b \vec{e}_z$$

□ **Q 45** - Par conservation de la puissance :

$$\mathcal{P}_{meca} + \mathcal{P}_{elec} = 0$$

On obtient :

$$ei + \Gamma\omega = 0 \quad \text{soit} \quad e = -iM_b\omega$$

□ **Q 46** - Par application de la loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$

Par application du TMC :

$$L\dot{\omega} = -i^2 M_b + \Gamma_0$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = i(t) \left(\frac{M_b}{2\pi N M_a} \omega - \frac{R}{2\pi N M_a} \right) \\ \dot{\omega} = \frac{\Gamma_0}{L} - \frac{M_b}{L} i^2 \end{cases}$$

□ **Q 47** - En utilisant les relations précédentes,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$$

Cette fonction est homogène à une énergie.

Le calcul du gradient donne :

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\omega} = L\omega - IR/M_b \quad \text{et} \quad \frac{d\mathcal{H}}{di} = Li - L\Gamma_0/M_b i$$

Le gradient s'annule lorsque les deux composantes s'annulent, de plus, ces valeurs correspondent à l'annulation de $\frac{di}{dt} = 0$ et $\frac{d\omega}{dt} = 0$. On obtient donc un régime stationnaire !

□ **Q 48** - On observe que les lignes de niveau « s'enfoncent » lorsqu'on se rapproche de la zone de gradient nul. La fonction $\mathcal{H}$ est donc minimal lorsque le gradient s'annule. Par analogie avec l'énergie potentielle, un minimum correspond à une zone d'équilibre stable.