

I. Valorisation des eaux de pluie par électrolyse en ligne

Données à 298 K :

- Enthalpies standard de formation :

	O ₂ (gaz)	H ₂ O (liq)	H ₂ (gaz)
$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹)	0	-285,5	0

- Potentiels redox standard en V :

	Cl ₂ /Cl ⁻	Na ⁺ /Na	O ₂ /H ₂ O	H ⁺ /H ₂
E° (V)	1,36	-2,71	1,23	0

- Surpotentiels seuils sur électrode de platine :

	Cl ₂ /Cl ⁻	O ₂ /H ₂ O	H ⁺ /H ₂
η_a (V)	0,08	0,77	
η_c (V)			-0,07

- Masses molaires (en g · mol⁻¹) : M (Na) = 23 g · mol⁻¹ et M (Cl) = 35 g · mol⁻¹.
- Charge par mole de charges élémentaires : 1 Faraday = $\mathcal{F}$ = 96 500 C · mol⁻¹.
- Constante des gaz parfaits : R = 8,31 J · K⁻¹ · mol⁻¹.
- $\frac{RT \ln(10)}{\mathcal{F}}$ = 0,06 V.

La récupération d'eau de pluie dans des bacs de stockage permet de nombreuses utilisations : arrosage, alimentation des chasses d'eau et lave-linge entre autres.

Dans l'agriculture, on l'utilise également pour le bétail au prix d'un traitement de désinfection par production de dichlore, qui peut être réalisé par électrolyse. On considère tout d'abord l'électrolyse de l'eau pure à T = 298 K, avec deux électrodes de platine, sous l'action d'une différence de potentiel U, permettant de recueillir du dioxygène et du dihydrogène gazeux.

On donne le schéma de principe de la cellule d'électrolyse (figure 1).

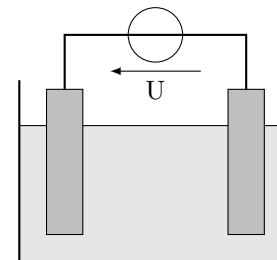


FIGURE 1 – Cellule d'électrolyse.

□ **Q 1** - Préciser les demi-réactions électroniques qui se produisent lors de l'électrolyse de l'eau pure et en donner le bilan (pour une unité stœchiométrique d'eau). On précise que le platine des électrodes ne participe à aucune réaction.

□ **Q 2** - Calculer la constante d'équilibre K° de l'équation bilan ainsi que l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ à la température T = 298 K.

□ **Q 3** - Déterminer l'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ$ de la réaction à T = 298 K. Est-il préférable de pratiquer cette électrolyse à haute température ou à basse température ? Justifier.

□ **Q 4** - Reproduire le schéma de la figure 1 sur votre copie et faire apparaître le sens de circulation du courant et des électrons, les noms des électrodes et le sens de circulation des ions dans la solution.

□ **Q 5** - En considérant uniquement l'aspect thermodynamique, quelle tension minimale $U_{\min}$ doit être appliquée pour que l'électrolyse démarre ? On suppose $p(\text{H}_2) = p(\text{O}_2) = 1$ bar.

□ **Q 6** - On constate qu'en réalité il faut appliquer une différence de potentiel supérieure à $U_{\text{cin}} = 2,07$ V afin d'observer une réaction sur des électrodes de platine, en raison de l'aspect cinétique de la réaction. On propose en figure 2 les courbes intensité-potential relatives à l'électrolyse. Identifier les courbes et justifier la valeur de U_{cin} par un calcul.

□ **Q 7** - En réalisant expérimentalement cette manipulation, on constate que le courant circulant est extrêmement faible. Pourquoi ?

□ **Q 8** - Pour traiter cette eau, on ajoute du chlorure de sodium Na⁺ + Cl⁻ à raison de

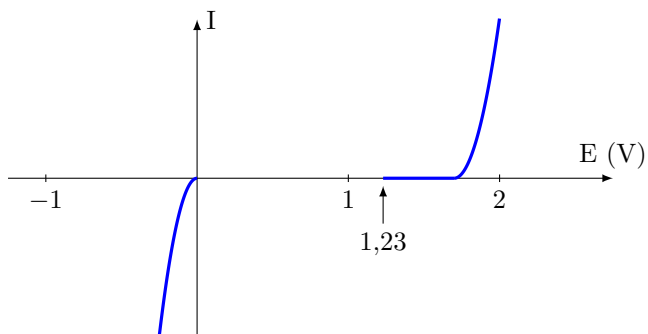


FIGURE 2 – Courbes intensité-potential pour l'électrolyse de l'eau.

100 g par m^3 de solution. On considère $p(\text{Cl}_2) = 1$ bar. Les demi-réactions électroniques sont-elles modifiées ? Pourquoi ? Écrire la réaction d'oxydo-réduction correspondante.

□ **Q 9** - L'intensité du courant circulant dans l'électrolyseur vaut $I = 10$ A. Quel volume de solution peut-on traiter par heure ?

□ **Q 10** - Le dichlore se décompose au contact de l'eau en acide hypochloreux HClO et en acide chlorhydrique. Écrire le bilan de cette réaction. Cette réaction est-elle une réaction acidobasique ou une réaction redox ? Justifier.

II. Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D , tombent à la vitesse $v_{\text{lim}}(D)$ et sont réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$ avec $K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ et que la durée de l'impact est :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)} \quad \text{avec} \quad \xi = 0,65$$

□ **Q 11** - Exprimer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant la durée τ d'un impact, en fonction de N , S , D et de ξ . En déduire l'expres-

sion de la surface maximale S_{max} du capteur du disdromètre permettant d'éviter des chevauchements du signal dus à deux impacts successifs.

Dans une averse, on trouve en fait plusieurs tailles de gouttes. La distribution des tailles de gouttes est caractérisée par la valeur $n(D)$, telle que le nombre de gouttes de pluie par unité de volume, de diamètre compris entre D et $D+dD$ s'écrit : $dN = n(D)dD$.

Une distribution empirique très utilisée est celle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) \quad \text{avec} \quad n_0 = 8,0 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1}$$

□ **Q 12** - On considère une averse contenant toutes les tailles de gouttes, répondant à la distribution de Marshall et Palmer. Montrer que D_0 représente le diamètre moyen des gouttes.

On donne :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$$

□ **Q 13** - Exprimer pour la distribution de Marshall et Palmer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant une durée τ .

En déduire une seconde expression de S_{max} . En pratique, le constructeur applique une marge. On prend librement la valeur $\xi = 6,5$. Calculer S_{max} numériquement pour $D_0 = 1,5$ mm.

On peut étalonner le disdromètre à l'aide d'un pluviomètre : c'est un simple récipient cylindrique gradué recueillant l'eau de pluie (photo 3). Il ne permet pas de mesurer $n(D)$, mais seulement l'intensité R de l'averse.

Cette intensité R est définie comme la hauteur d'eau tombant au sol par unité de temps. Elle est donnée en pratique en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$. Il suffit donc de graduer le pluviomètre pour lire la hauteur d'eau après une durée définie et calculer l'intensité R .



FIGURE 3 – Pluviomètre.

□ **Q 14** - On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D_0 , tombant à la vitesse $v_{\text{lim}}(D_0)$ et réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

Exprimer l'intensité R de cette averse en fonction de N , D_0 et de $v_{\text{lim}}(D_0)$. □ **Q**

15 - Justifier que R s'exprime de manière générale par :

$$R = \int_0^{+\infty} n(D) v_{\text{lim}}(D) \frac{\pi D^3}{6} dD$$

et calculer R . On donne :

$$\int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} dx = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11,6$$

Faire l'application numérique en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ pour $D_0 = 1,5 \text{ mm}$.

En général, le disdromètre sépare les gouttes en « classes » : à chaque classe correspond un diamètre D moyen et une « largeur » δD en diamètre. Cela signifie qu'appartiennent à la même classe toutes les gouttes dont le diamètre est compris dans l'intervalle $[D - \frac{\delta D}{2}, D + \frac{\delta D}{2}]$.

On donne (figure 4) l'histogramme obtenu après une mesure sur une durée de 24 heures avec un disdromètre de surface $S = 80 \text{ cm}^2$.

Cet histogramme donne le nombre de gouttes mesuré pour chaque classe, de largeur en diamètre variable :

- $\delta D = 0,1 \text{ mm}$ pour $0 \text{ mm} < D \leq 1 \text{ mm}$,
- $\delta D = 0,2 \text{ mm}$ pour $1 \text{ mm} < D \leq 2 \text{ mm}$,
- $\delta D = 0,4 \text{ mm}$ pour $D > 2 \text{ mm}$.

□ **Q 16** - Expliquer comment il est possible de calculer R à l'aide de ces données (le calcul n'est pas demandé).

III. Disdromètre optique

Le second type de disdromètre, plus récent, est le disdromètre optique (photo 5).

Il est constitué :

- d'une source émettant un faisceau lumineux de section rectangulaire traversé par les gouttes de pluie. Le faisceau a une épaisseur $h = 1,0 \text{ cm}$, une largeur $\ell = 4,0 \text{ cm}$ et une longueur $L = 25,0 \text{ cm}$ (figure 6) ;
- d'un capteur, sur lequel est focalisé le faisceau lumineux qui délivre une tension $e(t)$ proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue.

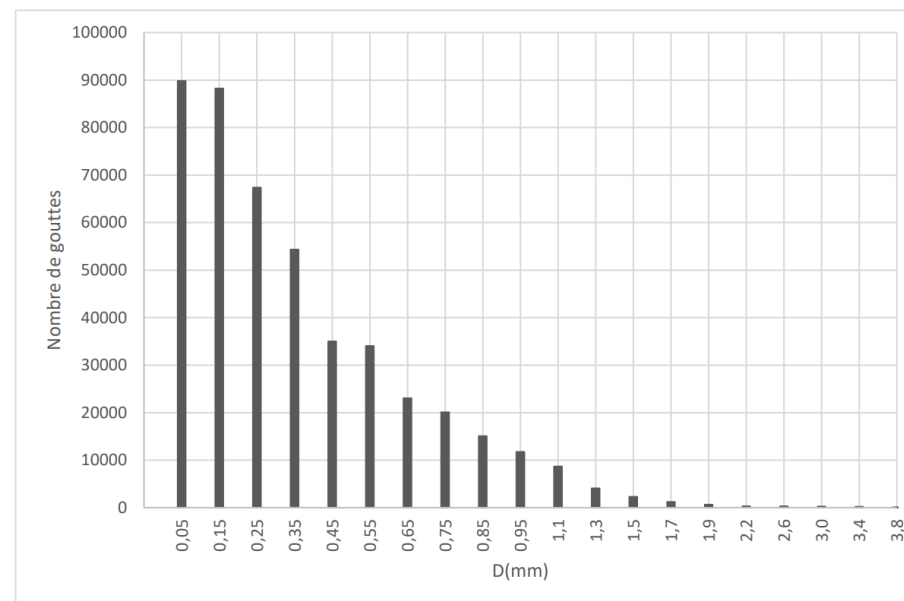


FIGURE 4 – Résultats d'une mesure sur une durée de 24 heures.

Sans passage de goutte : $e(t) = kI_0$, où I_0 est l'intensité du faisceau et k une constante. Lors du passage d'une goutte : $e(t) = k(I_0 - I(t))$ où $I(t)$ est l'intensité occultée par la goutte. Le signal $e(t)$ est traité de la manière représentée sur le schéma ci-dessous :



FIGURE 5 – Disdromètre Parsivel.

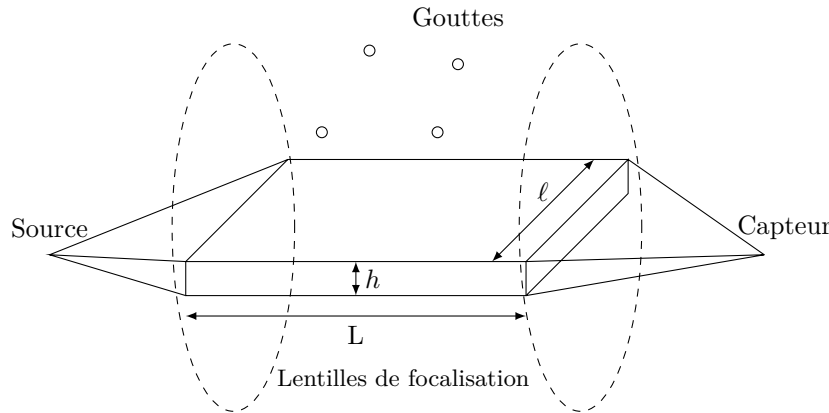
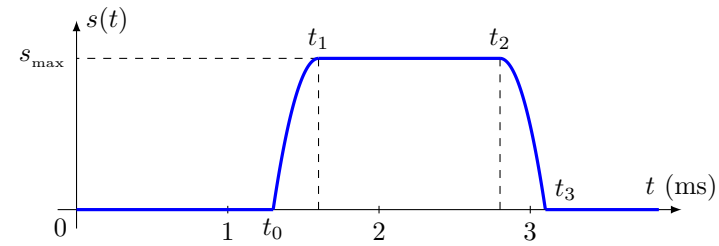
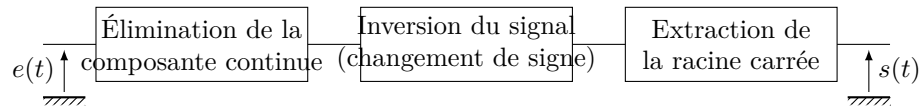


FIGURE 6 – Modèle de disdromètre optique.



$$\begin{aligned} t_0 &= 1,3 \text{ ms} \\ t_1 &= 1,6 \text{ ms} \\ t_2 &= 2,8 \text{ ms} \\ t_3 &= 3,1 \text{ ms} \end{aligned}$$

FIGURE 7 – Signal $s(t)$ généré par le passage d'une goutte dans le faisceau lumineux.

Q 19 - Montrer que le maximum $s_{\max}$ du signal $s(t)$ est proportionnel au diamètre D de la goutte détectée :

$$s_{\max} = K'D$$

Q 20 - Quel avantage présente le disdromètre optique par rapport au disdromètre à impact ?

IV. Théorie géométrique de l'arc en ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel. On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la figure 8. Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i . L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 8) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

Q 21 - Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

Q 22 - La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (figure 8). Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$. **Q 23 -** Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Q 17 - Proposer un montage simple permettant d'éliminer la composante continue. Quel composant électronique permettrait de réaliser le bloc d'inversion du signal ?

Après traitement de $e(t)$, on obtient le signal $s(t)$, dû au passage d'une goutte dans le faisceau présenté figure 7. On suppose que le diamètre de la goutte est inférieur à h .

Q 18 - Calculer la vitesse de chute de la goutte en expliquant la démarche. □

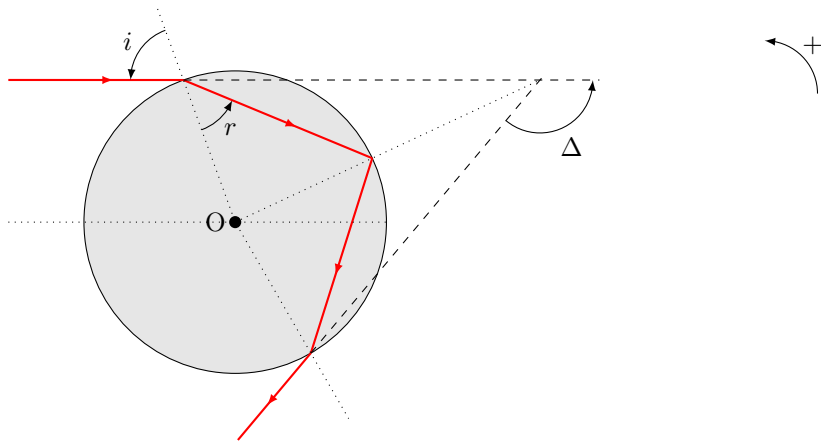


FIGURE 8 – Cas d’une réflexion et de deux réfractions.

Donnée : $\frac{du}{dt} \arcsin(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

□ **Q 24** - Justifier à l’aide de la figure 9 que l’on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

□ **Q 25** - Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l’eau, pour le violet ($\lambda = 400$ nm, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1,330$). □ **Q 26** - Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l’œil de l’observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L’observateur observe-t-il le rouge à l’intérieur ou à l’extérieur de l’arc ?

V. Théorie ondulatoire de l’arc en ciel

Deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2 . Ces deux ondes se propagent dans un milieu d’indice n et interfèrent en un point P après avoir parcouru les distances $x_1 = S_1P$ et $x_2 = S_2P$. On modélise les amplitudes des ondes en P par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$

$$s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec $k_i = n_i \frac{\omega}{c}$ ($i = 1$ ou 2), a_1 , a_2 , φ_1 et φ_2 constantes. c est la célérité de la lumière dans le vide.

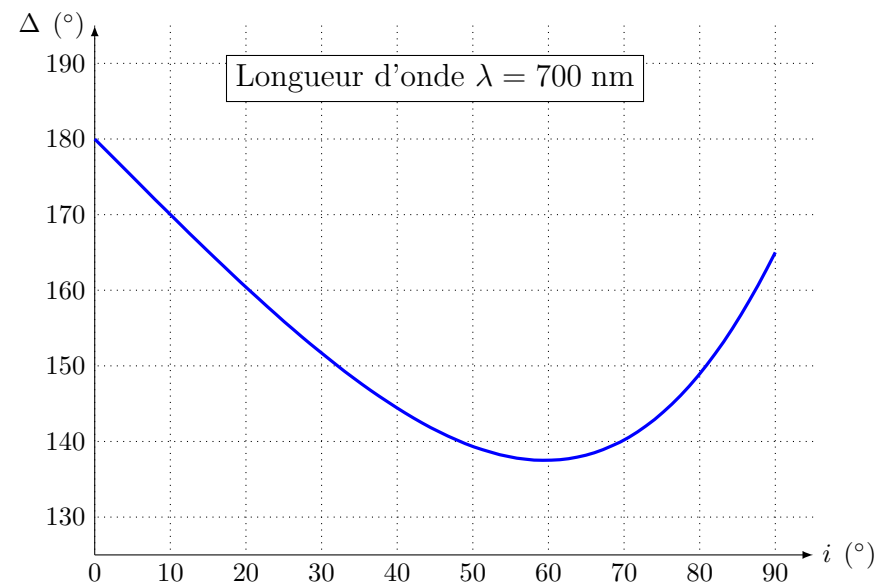


FIGURE 9 – Déviation en fonction de l’angle d’incidence.

□ **Q 27** - Donner un ordre de grandeur de ω_1 et ω_2 pour la lumière visible.

□ **Q 28** - L’intensité lumineuse $I(P)$ observée à l’œil nu en P est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l’amplitude reçue en P , soit : $I(P) = K \langle s^2(P, t) \rangle_\tau$. Sur quelle durée τ cette valeur moyenne est-elle calculée ?

□ **Q 29** - Calculer l’intensité $I(P)$ et montrer qu’elle s’écrit :

$$I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$$

À quelle(s) condition(s) le terme $I_{12}(P)$ est-il non nul ?

$$\text{Donnée : } \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

□ **Q 30** - On suppose dans la suite que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $\varphi_1 = \varphi_2$. Montrer que l’intensité en P s’écrit :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(P)\right)$$

où λ est la longueur d’onde dans le vide. La grandeur $\delta(P)$ sera exprimée en fonction de l’indice n du milieu, de x_1 et de x_2 .

Il est possible (photo 10) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits « surnuméraires ».

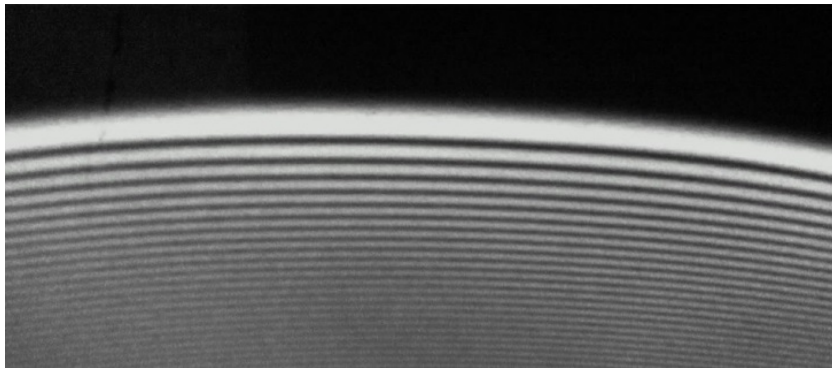


FIGURE 10 – Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau.

□ **Q 31** - Représenter la courbe $I(P)$ en fonction de $\delta(P)$. En observant la photo 10, que peut-on dire de I_1 et I_2 ?

On considère (figure 11) deux rayons d'incidences i_1 et i_2 , voisins du rayon d'incidence i_m (en pointillés) sur une goutte d'eau, se réfléchissant une seule fois à l'intérieur de la goutte d'eau et émergeant dans des directions parallèles.

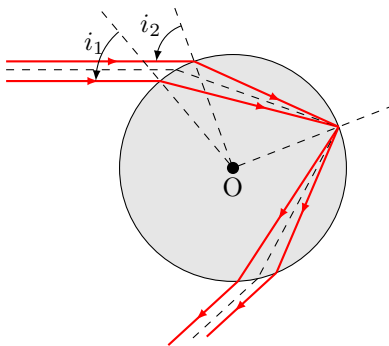


FIGURE 11 – Rayons responsables des interférences.

□ **Q 32** - Où ces rayons interfèrent-ils ?

□ **Q 33** - On admet que la différence de marche en un point P du champ d'interférences s'écrit :

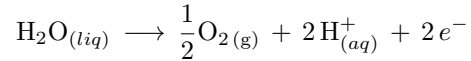
$$\delta(P) = D (\cos(i_2) - \cos(i_1)) - 2Dn (\cos(r_2) - \cos(r_1))$$

Exprimer la condition permettant d'observer des interférences constructives. L'écart angulaire entre les franges est-il plus grand pour les petites ou les grosses gouttes ? Justifier qualitativement.

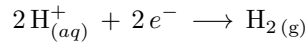
□ **Q 34** - Les rayons incidents d'angles d'incidence $i_1 = 50,13^\circ$ et $i_2 = 67,98^\circ$ donnent pour une radiation rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1,330$) des rayons émergents parallèles. Quel diamètre de goutte permettra d'observer la frange claire d'ordre -2 dans la direction des rayons émergents ?

I. Valorisation des eaux de pluie par électrolyse en ligne

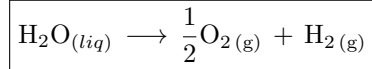
□ **Q 1** - Lors de l'électrolyse de l'eau pure, on oxyde l'eau en dioxygène à l'anode :



et on réduit l'eau en dihydrogène à la cathode :



Le bilan est :



□ **Q 2** - Pour le couple $\text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)}$:

$$E_1 = E^\circ \text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)} + \frac{0,06}{2} \log \frac{p^\circ \times [\text{H}^+]^2}{p_{\text{H}_2}}$$

Pour le couple $\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)}$

$$E_2 = E^\circ \text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)} + \frac{0,06}{2} \log \frac{p_{\text{O}_2}^{1/2} \times [\text{H}^+]^2}{p^\circ^{1/2}}$$

À l'équilibre chimique, le potentiel de la solution est unique ainsi $E_1 = E_2$ d'où :

$$E^\circ(\text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)}) + \frac{0,06}{2} \log \frac{p^\circ \times [\text{H}^+]_{(eq)}^2}{p_{\text{H}_2,eq}} = E^\circ(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)}) + \frac{0,06}{2} \log \frac{p_{\text{O}_2,eq}^{1/2} \times [\text{H}^+]_{eq}^2}{p^\circ^{1/2}}$$

$$E^\circ(\text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)}) - E^\circ(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)}) = \frac{0,06}{2} \log \frac{p_{\text{O}_2,eq}^{1/2} \times [\text{H}^+]_{eq}^2}{p^\circ^{1/2}} - \frac{0,06}{2} \log \frac{p^\circ \times [\text{H}^+]_{(eq)}^2}{p_{\text{H}_2,eq}}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \frac{0,06}{2} \log \frac{p_{\text{O}_2,eq}^{1/2} \times [\text{H}^+]_{(eq)}^2}{p^\circ^{1/2}} - \frac{0,06}{2} \log \frac{p^\circ \times [\text{H}^+]_{(eq)}^2}{p_{\text{H}_2,eq}} \\ &= 0,03 \log \frac{p_{\text{O}_2,eq}^{1/2}}{p^\circ} \times \frac{p_{\text{H}_2,eq}}{p^\circ} = 0,03 \log(K^\circ) \end{aligned}$$

$$K^\circ = 10^{\frac{E^\circ \text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)} - E^\circ \text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)}}{0,03}} = 10^{-41}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= -RT \ln(K^\circ) = -\ln(10)RT \log(K) \\ &= -RT \ln(10) \frac{E^\circ \text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)} - E^\circ \text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)}}{\frac{RT \ln(10)}{2\mathcal{F}}} \end{aligned}$$

$$\Delta_r G^\circ = 2\mathcal{F}E^\circ \text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)} - E^\circ \text{H}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)} = 2,37 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

□ **Q 3** - D'après la loi de Hess :

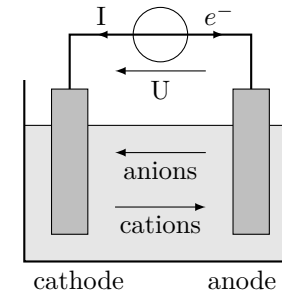
$$\Delta_r H^\circ = \frac{1}{2} \Delta_f H^\circ \text{O}_{2(g)} + \Delta_f H^\circ \text{H}_{2(g)} - \Delta_f H^\circ \text{H}_2\text{O}_{(liq)}$$

D'après les données de l'énoncé :

$$\Delta_r H^\circ = 285,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La réaction est endothermique, d'après la loi de Hess, il serait a priori préférable de la faire à haute température (mais étant donnée la valeur de $\Delta_r H^\circ$, ça ne suffira pas à rendre la réaction équilibrée).

□ **Q 4** - Schéma :



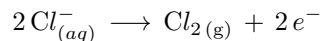
□ **Q 5** - Il faut au moins imposer une tension $U_{\min} = \Delta E = 1,23 \text{ V}$.

□ **Q 6** - La courbe aux courants négatifs correspond à la réduction de l'eau en dihydrogène ; celle aux courants positifs à l'oxydation de l'eau en dioxygène. D'après les surtensions données :

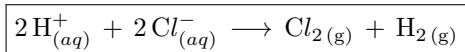
$$U_{\min} = \Delta E_{\text{Nernst}} + \eta_a - \eta_c = 2,07 \text{ V}$$

□ **Q 7** - L'eau pure est peu conductrice : la résistance de l'ensemble est importante et empêche le passage de forts courants.

□ **Q 8** - Il n'y a aucun risque de réduire Na^+ ($E^\circ = -2,71 \text{ V}$: on rencontre le mur du solvant bien avant). Étant donné la surtension importante du couple $\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(liq)}$, on peut oxyder l'ion chlorure en dichlore pour une tension plus faible. La demi-équation correspondante est :



La demi-équation de réduction est la même, l'équation-bilan est donc :



□ **Q 9** - En une heure, une charge $Q = I\Delta t = 3,6 \times 10^4 \text{ C}$ circule, soit une quantité de matière d'électrons :

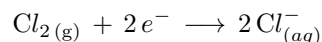
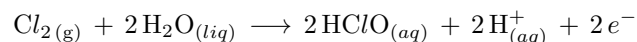
$$n_{e^-} = \frac{I\Delta t}{\mathcal{F}}$$

Pour un ion chlorure oxydé, un électron circule, la quantité d'ions chlorure oxydé est donc $n_{\text{Cl}^-} = n_{e^-}$. Un ion chlorure correspond à une entité NaCl soit $n_{\text{NaCl}} = n_{\text{Cl}^-} = n_{e^-}$. Finalement, la masse de chlorure de sodium utilisée est :

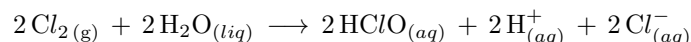
$$m = M_{\text{NaCl}} \frac{I\Delta t}{\mathcal{F}} = 22 \text{ g}$$

Il faut 100 g par mètre cube donc on peut traiter 220 L d'eau en une heure.

□ **Q 10** - Les demi-équations sont :



Le bilan est donc :



(en solution, l'acide chlorhydrique est présents sous la forme des ions $\text{H}_{(aq)}^+ + \text{Cl}_{(aq)}^-$). C'est une réaction **rédox** (une dismutation) : le nombre d'oxydation du chlore passe de 0 dans $\text{Cl}_{2(g)}$ à -I dans HCl , et à +I dans $\text{HClO}_{(aq)}$.

II. Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

□ **Q 11** - Pendant une durée τ , ce sont les gouttes contenues dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}\tau$ de surface S qui vont frapper le disdromètre. Leur nombre est $N \times S v_{\text{lim}}\tau$. D'où :

$$G = NS\xi D$$

On veut $G < 1$ soit $S < \frac{1}{N\xi D}$:

$$S_{\text{max}} = \frac{1}{N\xi D}$$

□ **Q 12** - Pour estimer la taille moyenne des gouttes, on somme les produits du nombre de goutte de taille D (soit $n(D)dD$) par leur taille, et on divise par le nombre total de gouttes. Dans la distribution continue, cela s'exprime sous la forme d'une intégrale :

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} D n(D) dD}{\int_0^{+\infty} n(D) dD}$$

Ainsi :

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} D n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD}{\int_0^{+\infty} n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD}$$

On effectue le changement de variable $x = D/D_0$:

$$\langle D \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} x D_0 n_0 \exp(-x D_0) dx}{\int_0^{+\infty} n_0 \exp(-x D_0) dx} = \frac{D_0^2 n_0 \int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx}{D_0 n_0 \int_0^{+\infty} \exp(-x) dx}$$

Or $\int_0^{+\infty} \exp(-x) dx = [-\exp(-x)]_0^{+\infty} = 1$ et d'après l'énoncé $\int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx = 1$ ainsi, on a bien montré que :

$$\langle D \rangle = D_0$$

□ **Q 13** - Une goutte de rayon D frappe le disdromètre si elle est dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}}\tau = \xi D$. Ainsi :

$$G = \int_0^{+\infty} \xi D k n(D) dD = \xi S \int_0^{+\infty} D n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

Nous avons déjà calculé cette intégrale :

$$G = D_0^2 n_0 \xi S$$

La condition $G < 1$ permet d'écrire :

$$S_{\max} = \frac{1}{D_0^2 n_0 \xi}$$

Application numérique : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $n_0 = 8 \times 10^6 \text{ m}^{-4}$ et $\xi = 6,5$:

$$S_{\max} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 85 \text{ cm}^2$$

La photo 2 montre une platine circulaire de diamètre 10 cm soit une surface d'environ 80 cm^2 : le dimensionnement est correct.

□ **Q 14** - Le cadre est le même que celui de la Q13. Pendant dt , le nombre de gouttes qui frappent la surface est le nombre de goutte dans le cylindre de hauteur $v_{\text{lim}} D_0 dt$ soit $N S v_{\text{lim}} D_0 dt$. Le volume d'une goutte est $\pi D_0^3 / 6$. Par unité de surface et de temps :

$$R = N \frac{\pi D_0^3}{6} v_{\text{lim}} D_0$$

□ **Q 15** - En général, le volume lié aux gouttes de diamètre compris entre D et $D + dD$ est :

$$n(D) dD \times S v_{\text{lim}}(D) dt \times \frac{\pi D^3}{6}$$

• $n(D) dD$ est le nombre de gouttes de rayon compris entre D et $D + dD$ par unité de volume ;

• $S v_{\text{lim}}(D) dt$ est le volume du cylindre contenant ces gouttes qui vont frapper la surface S pendant dt ;

• $\pi D^3 / 6$ est le volume d'une goutte de rayon D .

Ainsi, par unité de surface et de temps :

$$R = \int_0^{+\infty} n(D) dD v_{\text{lim}}(D) \times \frac{\pi D^3}{6}$$

Ainsi :

$$R = \int_0^{+\infty} K \sqrt{D} \frac{\pi D^3}{6} n_0 \exp -\frac{D}{D_0} dD$$

On effectue le changement de variable $x = D/D_0$:

$$R = \int_0^{+\infty} K D_0^{4,5} n_0 \frac{\pi}{6} x^{3,5} \exp -x dx$$

$$R = K D_0^{4,5} n_0 \frac{\pi}{6} I \quad \text{où} \quad I = \int_0^{+\infty} x^{3,5} \exp -x dx \approx 11,6$$

Application numérique : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $n_0 = 8 \times 10^6 \text{ m}^{-4}$ et $K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$R = 1,4 \text{ mm/s}$$

Soit $5,1 \times 10^3 \text{ mm/h}$: ce résultat est gigantesque...

□ **Q 16** - Cet histogramme nous donne la répartition des tailles de goutte (la première barre correspond à $0 < D < 0,1 \text{ mm}$, la seconde à $0,1 \text{ mm} < D < 0,2 \text{ mm}$, etc.). Il paraît difficile d'estimer n_0 , mais on peut simplement calculer le volume correspondant à chaque barre :

$$V_i = N_i \times V(D)$$

où $V(D)$ est le volume moyen d'une goutte. On peut écrire :

$$V(D) = \frac{1}{\delta D} \int_{D-\frac{\delta D}{2}}^{D+\frac{\delta D}{2}} \frac{\pi D^3}{6} dD$$

en supposant la répartition des diamètres homogène sur l'intervalle $[D - \frac{\delta D}{2}; D + \frac{\delta D}{2}]$. Il reste à sommer les différents volumes associés à chaque taille de goutte pour conclure.

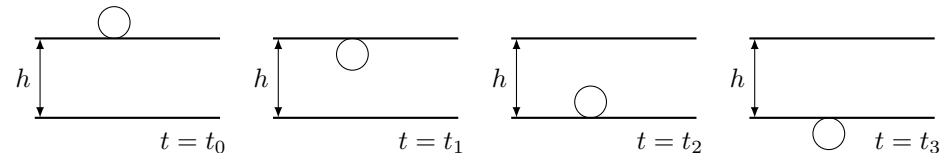
III. Disdromètre optique

□ **Q 17** - On peut placer un **filtre passe-haut** dont la pulsation de coupure serait bien inférieure à la pulsation fondamentale de $I(t)$.

Pour inverser la tension, on peut imaginer un montage inverseur utilisant un ALI (HP).

□ **Q 18** -

- De t_0 à t_1 , la goutte entre dans la zone de hauteur h ;
- de t_1 à t_2 , la goutte est contenue entièrement dans la zone de hauteur h ;
- de t_2 à t_3 , la goutte en sort complètement.



La goutte parcourt une hauteur h entre t_0 et t_2 (ou entre t_1 et t_3). Ainsi :

$$v = \frac{h}{t_2 - t_0} = \frac{h}{t_3 - t_1} = 6,5 \text{ m/s}$$

□ **Q 19** - L'intensité occultée par la goutte est proportionnelle à sa surface $I(t) = \alpha S(t)$. Ainsi $I_{\max} = \alpha S_{\max}$. Puis :

$$e(t) = kI_0 - \alpha S_{\max}$$

Après le bloc d'élimination de la composante continu, il reste $-k\alpha S_{\max}$; puis, après l'inversion $k\alpha S_{\max}$. Finalement, après extraction de la racine carrée :

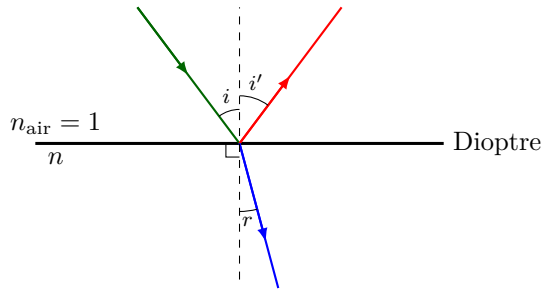
$$s_{\max} = \sqrt{k\alpha S_{\max}} = \sqrt{\frac{k\alpha\pi}{4}} D$$

$$s_{\max} = K'D$$

□ **Q 20** - La mesure de $s_{\max}$ indique D et celle de $t_2 - t_0$ indique $v_{\lim}$: il n'y a pas besoin d'hypothèses sur la force subie par la goutte.

IV. Théorie géométrique de l'arc en ciel

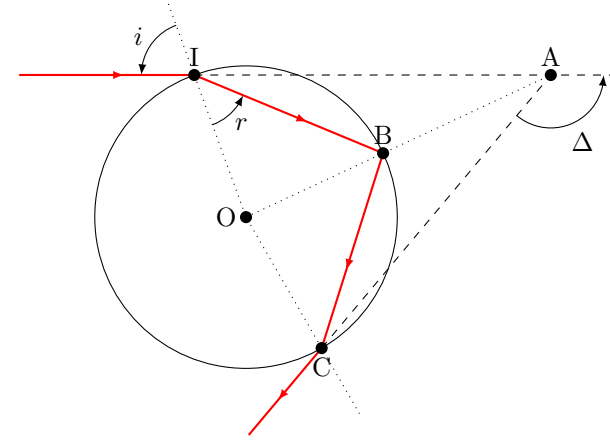
□ **Q 21** - Sur le schéma :



- Les rayons réfléchis et réfractés appartiennent au plan d'incidence.
- L'angle de réfraction r et l'angle d'incidence i sont liés par la relation

$$n_{\text{air}} \sin i = n \sin r \quad \text{Ainsi :}$$

□ **Q 22** - Sur le schéma :



Le triangle OIB est isocèle en O (OI et OB sont deux rayons) ainsi $\widehat{OIB} = \widehat{IBO} = r$ donc $\widehat{BOI} = \pi - 2r$. Dans le triangle AOI :

$$\widehat{OAI} + \widehat{AOI} + \widehat{OIA} = \pi$$

donc $\widehat{OAI} = \pi - \pi - 2r - i = 2r - i$. Ainsi $\widehat{CAI} = 2\widehat{OAI} = 4r - 2i$. Finalement :

$$\Delta = \pi - \widehat{CAI} = \pi - 4r + 2i$$

Or $r = \arcsin \frac{\sin i}{n} = \arcsin \frac{x}{n}$ ainsi :

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin \frac{x}{n} + 2 \arcsin x$$

□ **Q 23** - On cherche la valeur x_m de x annulant $\frac{d\Delta}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dx} &= 0 - 4 \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{n^2 - x_m^2} = 4\sqrt{1 - x_m^2}$$

On isole x_m :

$$n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 \quad \text{soit}$$

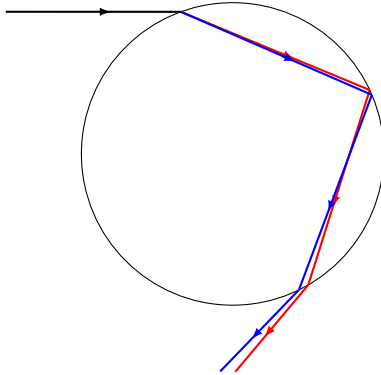
$$x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

□ **Q 24** - On observe d'après la figure 8 qu'il existe un intervalle d'angle autour de 60° pour lequel Δ est constant, autour de 138° : tous les rayons arrivant à cette incidence sont renvoyés dans des directions très proches.

□ **Q 25** -

- bleu/indigo : pour $n = 1,343$, $x_m = 0,8556$ et $\Delta_m = 139,4^\circ$
- rouge : pour $n = 1,330$, $x_m = 0,8624$ et $\Delta_m = 137,5^\circ$

□ **Q 26** - L'angle Δ pour le rouge est plus petit que pour le bleu. Sur le schéma :



Les rayons bleus sont moins inclinés par rapport à l'horizontale que les bleus. Le rouge est vu à l'extérieur et le bleu à l'intérieur.

V. Théorie ondulatoire de l'arc en ciel

□ **Q 27** - Pour la lumière visible, ω va de $2,5 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ à $5 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$.

□ **Q 28** - On moyenne sur une durée bien supérieure à la période de l'onde électromagnétique (typiquement un temps plus grand que $1 \mu\text{m}$).

□ **Q 29** - On considère l'interférence entre les deux ondes écrites dans l'énoncé. Le champ total est :

$$s(P, t) = a_1 \cos \omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1 + a_2 \cos \omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2$$

L'intensité lumineuse est $I = K \langle s^2(P, t) \rangle$. Pour exprimer l'intensité, on développe :

$$K \langle s^2(P, t) \rangle = \underbrace{K \langle s_1^2(P, t) \rangle}_{I_1} + \underbrace{K \langle s_2^2(P, t) \rangle}_{I_2} + K \langle 2s_1(P, t)s_2(P, t) \rangle$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \langle 2s_1(P, t)s_2(P, t) \rangle &= \langle 2a_1 a_2 \cos \omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1 \cos \omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2 \rangle \\ &= a_1 a_2 \langle \cos \omega_1 + \omega_2 t - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \varphi_1 + \varphi_2 \rangle + a_1 a_2 \langle \cos \omega_1 - \omega_2 t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

On a utilisé :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos a + b + \cos a - b$$

La valeur moyenne d'un cosinus est nulle et comme :

$$I_1 = \frac{K a_1^2}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{K a_2^2}{2} \quad \text{alors} \quad 2\sqrt{I_1 I_2} = K a_1 a_2$$

Ainsi :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \omega_1 - \omega_2 t - k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_1 - \varphi_2 \rangle$$

Cet terme est non nul à condition d'avoir $\omega_1 = \omega_2$ (sources synchrones) et

$\varphi_1 - \varphi_2$ constant (sources cohérentes temporellement).

□ **Q 30** - On a alors $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ et $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$. On peut écrire :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{\omega}{c} n_1 x_1 - n_2 x_2$$

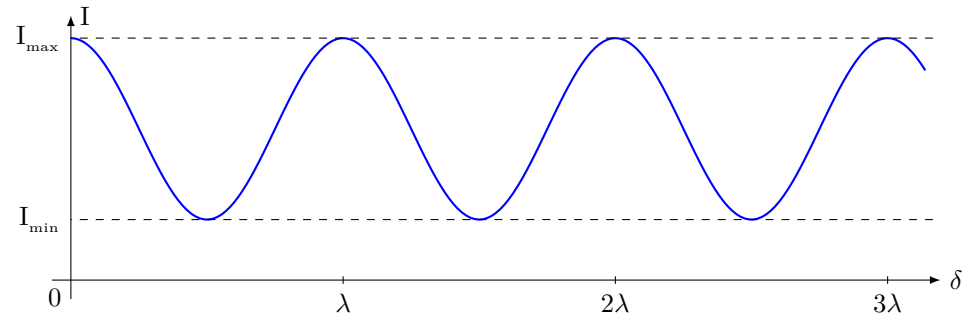
Or $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$ ainsi on identifie :

$$\delta(P) = n_1 x_1 - n_2 x_2 \quad \text{de sorte que} \quad I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(P)$$

□ **Q 31** - Il y a une oscillation entre :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}^2 \quad \text{et} \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}^2$$

avec une période de λ .



Sur la photographie, on observe des franges sombres, indiquant que $I_{\min} \approx 0$ soit

$$I_1 = I_2$$

□ **Q 32** - On observe les interférences dans le plan focal d'une lentille (cela peut-être la rétine de l'observateur ou le capteur photo d'un appareil).

□ **Q 33** - Il y a des interférences constructives si $\delta = p\lambda$. L'écart entre deux franges est tel que :

$$D \cos i_{2,p+1} - \cos i_{1,p+1} - 2Dn \cos r_{2,p+1} - \cos r_{1,p+1} - D \cos i_{2,p} - \cos i_{1,p} + 2Dn \cos r_{2,p} - \cos r_{1,p} = \lambda$$

Si D est plus grand, l'écart angulaire Δi ou Δr sera **plus petit**.

□ **Q 34** - On cherche D tel que :

$$D \cos i_2 - \cos i_1 - 2Dn \cos r_2 - \cos r_1 = -2\lambda$$

Soit :

$$D = \frac{2\lambda}{2n \cos r_2 - \cos r_1 - \cos i_2 - \cos i_1}$$

Application numérique :

- $i_1 = 50,13^\circ$ donc $r_1 = \arcsin \frac{1}{n} \sin i_1 = 35,25^\circ$
- $i_2 = 67,98^\circ$ donc $r_2 = \arcsin \frac{1}{n} \sin i_2 = 44,19^\circ$

soit $D = 1,357 \text{ mm}$