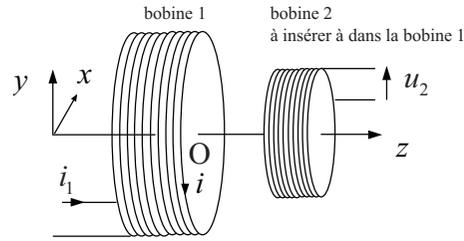


On place deux bobines cylindriques assez longues de telle sorte qu'elles aient le même axe de révolution. La bobine la plus grande de résistance R_1 et d'auto-inductance L_1 est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de force électromotrice $e_g = e_m \cos(\omega t + \phi)$ et de résistance interne $R_g = 50 \Omega$. La valeur efficace de la force électromotrice du générateur vaut $e_{eff} = 7,31 \text{ V}$. Par ailleurs, un voltmètre d'impédance infinie indique la tension efficace aux bornes de la petite bobine (notée 2) située à l'intérieur de l'autre bobine.



Le tableau ci-dessous consigne des valeurs numériques de U_2 (valeur efficace de la tension aux bornes de la bobine 2) en fonction de la fréquence f imposée par le générateur.

f en Hz	31	50	78,6	110	1000	2200
U_2 en V	0,161	à,242	0,323	0,376	0,478	0,480

□ **Q 1** - On considère le filtre de tension d'entrée e_g et de tension de sortie u_2 . Montrer par une construction graphique à réaliser directement sur votre copie que ces résultats sont compatibles avec un comportement du premier ordre.

□ **Q 2** - Indiquer les valeurs numériques du gain statique H_0 dans la bande passante et de la fréquence de coupure f_1 .

Par un choix convenable de date origine, l'intensité du courant dans la bobine vaut $i_1(t) = I_m \cos \omega t$.

□ **Q 3** - Relier l'amplitude de l'intensité circulant dans cette bobine aux caractéristiques électriques du circuit. Exprimer de même la phase origine ϕ_e de la force électromotrice du générateur e_g .

□ **Q 4** - Rappeler les caractéristiques du champ magnétique dans un solénoïde suffisamment long pour que l'on puisse négliger les effets de bords sachant que la bobine de longueur l_1 comporte N_1 spires. Mettre l'expression de la composante du champ magnétique suivant l'axe de la bobine sous la forme $\underline{B}_z = f(\omega)\underline{e}_g$.

□ **Q 5** - La bobine de détection 2 de N_2 spires circulaires de rayon r_2 est reliée à un oscilloscope de très grande impédance d'entrée aux fréquences considérées. Exprimer

en notation complexe la tension u_2 aux bornes de la bobine de détection en fonction de \underline{B}_z . On précisera sur un schéma la convention électrocinétique d'orientation retenue.

□ **Q 6** - En déduire l'expression de la fonction de transfert \underline{H} du filtre de tension d'entrée \underline{e}_g et de tension de sortie \underline{u}_2 . On donnera l'expression du gain H_0 dans la bande passante et de la fréquence de coupure f_1 .

□ **Q 7** - À l'aide des données expérimentales, déterminer l'inductance L_1 de la bobine sachant que $R_1 = 11,2 \Omega$.

Aucune connaissance préalable du principe de fonctionnement de la machine asynchrone n'est nécessaire pour traiter ce problème. Cette machine se compose principalement de deux parties :

- le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant $\underline{B}(t)$,
- le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface S mobile autour d'un axe.

Étude du stator

Soit un ensemble de trois bobines, dont les axes sont perpendiculaires à Oz et régulièrement décalés de $2\pi/3$. Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation ω_S dont les intensités sont les suivantes :

$$i_1(t) = I_0 \cos \omega_S t, i_2(t) = I_0 \cos(\omega_S t - 2\pi/3), i_3(t) = I_0 \cos(\omega_S t - 4\pi/3)$$

La fréquence d'alimentation de ces bobines statoriques est égale à $f_S = \omega_S/2\pi = 50 \text{ Hz}$. Chaque bobine crée en O un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B}_k = K i_k(t) \vec{e}_k$$

(K est une constante qui s'exprime en $\text{H}\cdot\text{m}^{-2}$ et \vec{e}_k est le vecteur unitaire de l'axe de la k^{e} bobine).

□ **Q 8** - Justifier l'unité de K par une analyse dimensionnelle.

□ **Q 9** - On donne le théorème de Ferraris :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\omega_S t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{e}_{k+1} = \frac{p}{2} \left(\cos \omega_S t \vec{e}_x + \sin \omega_S t \vec{e}_y \right)$$

En déduire que les 3 bobines créent au point O un champ tournant \vec{B} dont on donnera l'expression dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Donner la norme du champ $B_0 = \|\vec{B}\|$ en fonction

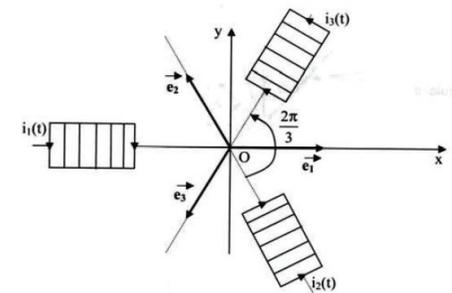


FIGURE 1 – Bobinage statorique

de K et I_0 . Préciser la vitesse angulaire de rotation du champ et calculer sa valeur numérique en tours par minutes (tour/min).

Entraînement du rotor

Le rotor, modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface S orientée selon la normale \vec{n} tourne autour d'un axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω ($\omega > 0$). On supposera le champ magnétique uniforme sur le cadre.

□ **Q 10** - Exprimer le flux Φ du champ magnétique \vec{B} généré par le stator à travers le cadre en fonction de B_0 , S , ω , ω_S et t . En déduire la force électromotrice d'induction $e(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction du flux maximum $\Phi_0 = B_0 S$, de la vitesse angulaire de glissement $\Omega = \omega_S - \omega$ et de t .

□ **Q 11** - Le cadre constitue un circuit série de résistance R et d'inductance L . Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ induit dans le cadre. L'orientation de l'intensité du courant induit est indiquée sur la figure fig. 2 sur laquelle la spire est vue de dessus.

□ **Q 12** - On se place en régime permanent sinusoïdal; l'intensité dans le cadre s'écrit alors

$$i(t) = I_M \sin(\Omega t - \psi)$$

En utilisant la notation complexe, montrer que :

$$\underline{i}(t) = I_M e^{j(\Omega t - \psi - \pi/2)} = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \pi/2)}$$

□ **Q 13** - En déduire l'expression de I_M en fonction de Φ_0 , Ω , R et L et préciser le signe de $\sin(\psi)$. Préciser si $i(t)$ est en avance ou en retard par rapport à $e(t)$.

□ **Q 14** - On donne $\Phi_0 = 10^{-3} \text{ T.m}^2$ et $L = 100 \text{ mH}$. Donner la valeur numérique de la valeur efficace de $i(t)$ dans le cas où $R \ll L\Omega$. Comment mesure-t-on en pratique une intensité efficace? Quelles différences y-a-t-il entre les positions AC et DC d'un multimètre numérique? La signification des positions AC et DC est-elle la même sur l'oscilloscope?

□ **Q 15** - On rappelle l'expression du moment magnétique \vec{M} du rotor : $\vec{M} = i(t)S\vec{n}$. En déduire le couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre puis sa projection sur l'axe Oz de rotation en fonction de S , B_0 , I_M , ψ , Ω et t .

□ **Q 16** - On donne la relation de trigonométrie suivante :

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}$$

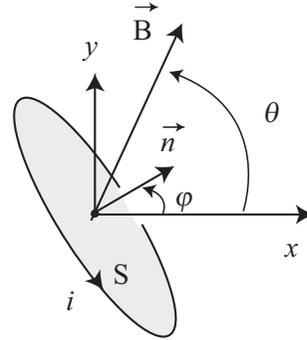


FIGURE 2 – Modélisation du rotor

Montrer que la valeur moyenne de Γ , notée Γ_m , est donnée par

$$\Gamma_m = \frac{\Phi_0^2}{2L} \frac{R L \Omega}{R^2 + L^2 \Omega^2}$$

□ **Q 17** - On peut tracer l'allure de Γ_m en fonction de ω . À quoi correspond physiquement la limite de Γ_m quand ω tend vers 0? Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou au contraire résistant?

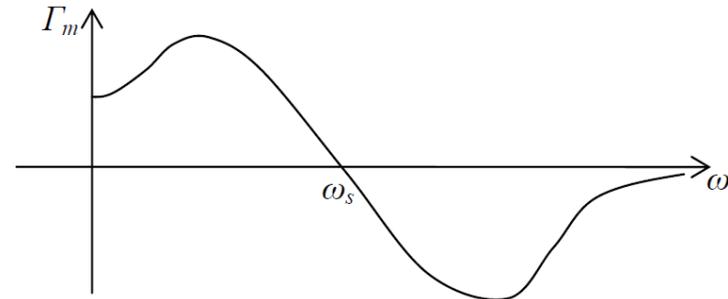


FIGURE 3 – Allure de Γ_m en fonction de ω

Puissance et rendement d'un moteur

On considère maintenant un moteur du type précédent relié à une charge par un arbre.

Le moment d'inertie de l'arbre est noté J . On notera Γ le couple délivré par le moteur, Γ_r le couple résistant dû à la charge (Γ et Γ_r positifs).

□ **Q 18** - En appliquant le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe de rotation, relier la dérivée de la vitesse angulaire ω de l'arbre à J , Γ et Γ_r .

□ **Q 19** - On considère les courbes suivantes correspondant à trois moteurs différents (figure 5) reliés à la même charge exerçant un couple résistant Γ_r constant.

Expliquer de façon précise quel(s) moteur(s) est (sont) susceptible(s) de démarrer.

□ **Q 20** - On se place maintenant en régime permanent; on a alors $\Gamma(\omega) = \Gamma_r$. En utilisant les résultats de la partie précédente, donner l'expression de la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur $\langle \mathcal{P}_{meca} \rangle = \Gamma_m \omega$ en fonction de Φ_0 , ω , ω_S , R et L .

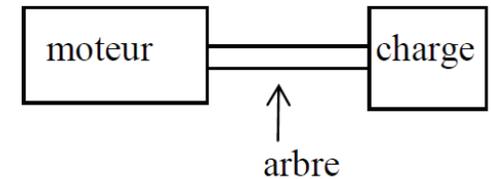


FIGURE 4 – moteur en charge

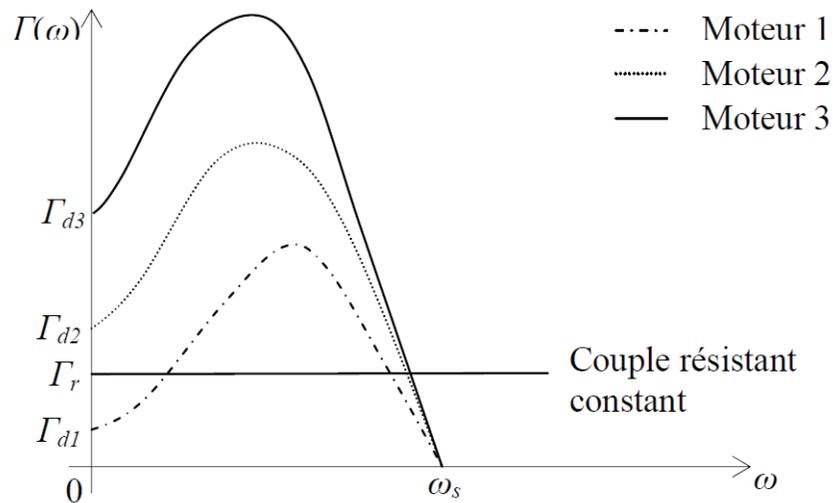


FIGURE 5 – comparaison de 3 moteurs

- **Q 21** - En utilisant à nouveau les résultats de la partie précédente, donner l'expression de la puissance moyenne $\langle P_J \rangle$ dissipée par effet Joule dans les conducteurs du rotor en fonction de Φ_0 , ω , ω_S , R et L .
- **Q 22** - En déduire la puissance électrique moyenne $\langle P_{e1} \rangle$ fournie au moteur en fonction de Φ_0 , ω , ω_S , R et L .
- **Q 23** - On introduit maintenant la grandeur $g = (\omega_S - \omega)/\omega_S$, appelée glissement, qui caractérise l'écart relatif entre la vitesse angulaire de synchronisme et la vitesse angulaire de rotation de l'arbre du moteur. Exprimer le rendement du moteur en fonction de g . La vitesse de rotation ω des moteurs asynchrones s'écarte rarement de plus de 5% de la vitesse de rotation du champ tournant. Lorsqu'elle s'en écarte de 5%, calculer le rendement du moteur asynchrone.

□ **Q 1** - En représentant $20 \log U_2/e_{eff}$, on obtient une courbe caractéristique d'un filtre passe haut du premier ordre. En effet, l'asymptote est à basse fréquence est voisine de 20 dB par décade.

□ **Q 2** - Le gain statique est obtenu à haute fréquence :

$$H_0 = \frac{U_2(f = 2200 \text{ Hz})}{e_{eff}} = 0,065$$

La fréquence de coupure est obtenue par

$$U_2(f_1) = \frac{U_{2max}}{\sqrt{2}} = 0,34 \text{ V}$$

soit $f_1 \approx 80 \text{ Hz}$

□ **Q 3** - Le circuit (2) étant ouvert, la loi des mailles dans le circuit (1) donne

$$e_g = R_g i_1 + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

En utilisant la notation complexe, on obtient

$$\underline{e}_g = (R_g + R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1$$

On en déduit que

$$e_m = |e_g| = \sqrt{(R_g + R_1)^2 + L_1^2\omega^2} |\underline{i}_1| = \sqrt{(R_g + R_1)^2 + L_1^2\omega^2} I_m$$

La phase s'obtient de la même manière :

$$\Phi = \arg \underline{e}/\underline{i} = \arg(R_g + R_1 + jL_1\omega) = \arctan \frac{L_1\omega}{R_1 + R_g}$$

□ **Q 4** - En considérant qu'il s'agit d'un solénoïde quasi-infini, le champ magnétique est donné par $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{e}_z$. Utilisons la notation complexe, il vient :

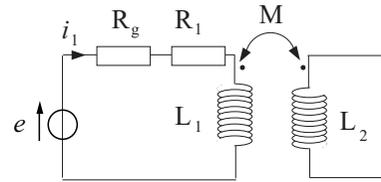
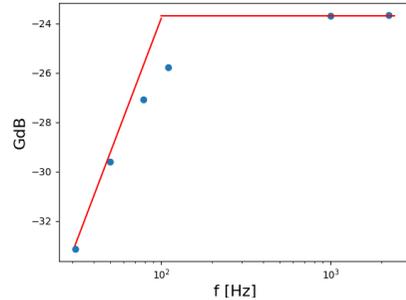
$$\underline{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \frac{\underline{e}_g}{R_g + R_1 + jL_1\omega}$$

□ **Q 5** - La loi de Faraday permet d'obtenir la tension aux bornes de la bobine (2) composée de N_2 spires :

$$u_2 = - \frac{d\Phi_{S_2}(B_1)}{dt}$$

Le champ magnétique est supposé uniforme sur la bobine (2), il vient

$$u_2 = - \frac{dB}{dt} \times N_2 \pi r_2^2$$



En utilisant la notation complexe, on obtient $\underline{u}_2 = -j\omega \underline{B}_1 \times N_2 \pi r_2^2$.

□ **Q 6** - D'après les résultats précédents, on en déduit que

$$\underline{u}_2 = -j\omega N_2 \pi r_2^2 \underline{B}_1 = -j\omega N_2 \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \frac{\underline{e}_g}{R_g + R_1 + jL_1\omega}$$

Ainsi,

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{e}_g} = -N_2 \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \frac{j\omega}{R_g + R_1 + jL_1\omega}$$

On en déduit que $H_0 = -N_2 \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1 L_1}$ et $f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{R_g + R_1}{L_1}$

□ **Q 7** - D'après l'expression de la fréquence de coupure :

$$L_1 = \frac{R_1 + R_g}{2\pi f_1} = \frac{11,2 + 50}{2 \times 3,14 \times 80} = 0,12 \text{ H}$$

Etude du stator

□ **Q 8** - Par définition du flux :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \sim B \times S$$

Par définition de l'inductance propre :

$$\Phi = L \times i$$

On en déduit l'expression de K :

$$K i \times S = L \times i \quad \text{soit} \quad K = L/S$$

La constante K s'exprime donc en $\text{H} \cdot \text{m}^{-2}$.

□ **Q 9** - D'après le théorème de superposition, le champ total vaut :

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

L'application du théorème de Ferraris conduit à un champ d'expression :

$$\vec{B}(t) = \frac{I_0 3}{K} \left(\cos \omega_S t \vec{e}_x + \sin \omega_S t \vec{e}_y \right)$$

La vitesse du angulaire du stator est donc donnée par

$$\omega_S = 2\pi f_S = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 3,0 \cdot 10^3 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Entrainement du rotor

□ **Q 10** - Par définition du flux du champ magnétique supposé uniforme sur la spire :

$$\Phi_S(\vec{B}) = \vec{B} \cdot S\vec{n} = B_0 S \cos(\theta - \phi) \quad \text{soit} \quad \Phi_S(\vec{B}) = \Phi_0 \cos(\omega_S - \omega)t$$

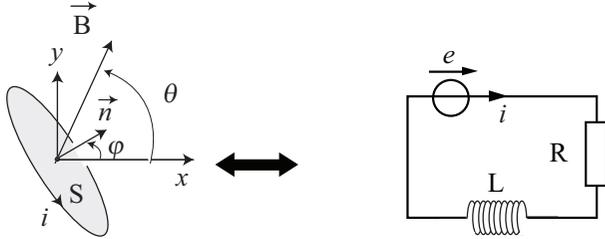
D'après la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = \Phi_0(\omega_S - \omega) \sin(\omega_S - \omega)t$$

d'où

$$e = \Phi_0 \Omega \sin \Omega t$$

□ **Q 11** - La f.e.m induite est donc orientée en convention générateur.



L'application de la loi des mailles sur le circuit électrique équivalent donne :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e$$

□ **Q 12** - En notation complexe, l'équation précédente devient :

$$R\dot{i} + jL\Omega\dot{i} = \Phi_0\Omega e^{j(\Omega t - \pi/2)}$$

d'où

$$\dot{i}(t) = \frac{\Phi_0\Omega e^{j(\Omega t - \pi/2)}}{R + jL\Omega}$$

□ **Q 13** - Pour obtenir I_M , calculons la norme de \dot{i} :

$$I_M = |\dot{i}| = \frac{\Phi_0\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$$

Par définition de l'argument :

$$- \text{Arg } \Psi = - \text{Arg} \frac{\Phi_0\Omega}{R + jL\Omega} = \arctan \frac{L\Omega}{R}$$

L'expression de $i(t)$ avec $\psi > 0$ indique qu'il s'agit d'un **retard** de phase par rapport à $e(t)$.

□ **Q 14** - Avec les simplifications proposées par l'énoncé :

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{\Phi_0}{L\sqrt{2}}$$

A.N. :

$$I_{eff} = 7,1 \text{ mA}$$

On mesure I_{eff} à l'aide d'un ampèremètre RMS. Sur un multimètre, les positions AC et DC permettent de mesurer respectivement la valeur efficace et moyennes. En revanche, sur un oscilloscope, la position AC permet de visualiser le signal sans sa valeur moyenne tandis que la position DC permet de visualiser le signal dans sa totalité.

□ **Q 15** - Le couple des forces de Laplace s'exprime par

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

En utilisant les conventions de la figure 2, on obtient :

$$\Gamma = Mi(t)S \sin(\theta - \phi) = MS I_M \sin(\Omega t - \psi) \sin(\theta - \phi)$$

En remplaçant $\theta - \phi = \Omega t$, on obtient

$$\Gamma = SBI_M \sin(\Omega t - \psi) \sin \Omega t$$

□ **Q 16** - À l'aide de la relation trigonométrique, l'expression précédente devient :

$$\Gamma = I_M \Phi_0 \frac{\cos(\psi) - \cos(2\omega t - \psi)}{2}$$

En valeur moyenne, $\langle \cos(2\omega t - \psi) \rangle = 0$. L'amplitude du courant

$$I_M = \frac{\Phi_0\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$$

En remplaçant, on obtient alors :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\Phi_0^2\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \frac{\cos(\psi)}{2}$$

Or $\psi = \text{Arg}(R + jL\Omega)$ soit $\cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$

Remplaçons cette expression dans la valeur du couple moyen :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Phi_0^2\Omega}{2} \frac{1}{R^2 + L^2\Omega^2} = \frac{\Phi_0^2}{2L} \frac{\Omega R L}{R^2 + L^2\Omega^2}$$

□ **Q 17** - La limite $\omega \rightarrow 0$ correspond au démarrage du moteur. Le couple est moteur si $\Gamma > 0$. Soit $\omega < \omega_S$.

□ **Q 18** - Le TMC donne $J\dot{\omega} = \Gamma - \Gamma_R$.

Q 19 - Seuls les moteurs 2 et 3 ont un couple suffisant pour démarrer ($\omega = 0$).

Q 20 - Par définition $\mathcal{P} = \Gamma\omega$, ainsi :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Gamma \rangle \omega = \frac{\Phi_0^2 \omega}{2L} \frac{(\omega_S - \omega)RL}{R^2 + L^2(\omega_S - \omega)^2}$$

Q 21 -

Q 22 -