Mines-Ponts – MP – 2023 – Physique I – Corrigé

Fonctions spéciales.

I La fonction de W de Lambert

I.1 Tir d'un projectile sans frottements

❑ – **1.** Un référentiel est l'ensemble constitué :
— d'un **solide** par rapport auquel on décrit le mouvement. On y fixe un point O, origine d'un repère cartésien ;
— d'une **horloge** paramétrant le temps.
Il est galiléen s'il vérifie le principe d'inertie : un point matériel soumis à aucune action mécanique est soit au repos, soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen **si la durée du mouvement est très inférieure à 24 h**.

❑ – **2.** On étudie le mouvement du projectile dans le référentiel terrestre, on utilise les notations et le repère défini dans l'énoncé. Les frottements étant négligés, le projectile n'est soumis qu'à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$$

Donc $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{u_z}$. On projette cette égalité vectorielle :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases}$$

On en déduit la vitesse par intégration :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K_1 \\ \dot{y}(t) = K_2 \\ \dot{z}(t) = -gt + K_3 \end{cases}$$

Donc $\dot{x}(0) = K_1$, $\dot{y}(0) = K_2$ et $\dot{z}(0) = K_3$. Or :

$$\vec{v}(0) = \vec{v_0} = v_0 \cos(\theta_0)\,\vec{u_y} + v_0 \sin(\theta_0)\,\vec{u_z}$$

Ainsi $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \cos(\theta_0)$ et $\dot{z}(0) = v_0 \sin(\theta_0)$. On identifie donc $K_1 = 0$, $K_2 = v_0 \cos(\theta_0)$ et $K_3 = v_0 \sin(\theta_0)$. Finalement :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = v_0 \cos(\theta_0) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\theta_0) \end{cases}$$

D'où les lois horaires du mouvement en intégrant une seconde fois :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \\ y(t) = v_0 \cos(\theta_0)\ t + C_2 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)\ t + C_3 \end{cases}$$

Donc $x(0) = C_1$, $y(0) = C_2$ et $z(0) = C_3$. Par définition de l'origine proposée dans l'énoncé $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, ainsi on identifie $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Les équations horaires du mouvement sont donc :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0 \cos(\theta_0)\ t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)\ t \end{cases}}$$

$x(t) = 0$ donc le mouvement reste dans le plan (Oyz).

❑ – **3.** Pour établir l'équation de la trajectoire, on identifie :

$$t = \frac{y}{v_0 \cos(\theta_0)}$$

ainsi :

$$z(y) = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} + v_0 \sin(\theta_0) \frac{y}{v_0 \cos(\theta_0)}$$

$$\boxed{z(y) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} y^2 + \tan(\theta_0)\ y}$$

La trajectoire est une **parabole**. Elle est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le sommet de la trajectoire.

❑ – **4.** Au sommet, $\dot{z}(t_S) = 0$ ainsi :

$$-g t_S + v_0 \sin(\theta_0) = 0 \qquad \text{soit} \qquad t_S = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$$

À ce moment, $x(t_S) = 0$,

$$y(t_S) = v_0 \cos(\theta_0) \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g}$$

$$z(t_S) = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{g^2} + v_0 \sin(\theta_0) \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

Les coordonnées du sommet sont :

$$\boxed{S = \left(x_S = 0\ ;\ y_S = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g}\ ;\ z_S = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g} \right)}$$

La portée du tir est le moment $\ell \neq 0$ où $z(\ell) = 0$. Soit :

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \ell^2 + \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} \ell = 0$$

$$\boxed{\ell = \frac{2v_0^2}{g} \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)}$$

La portée est maximale si $\sin(2\theta_0) = 1$, soit $2\theta_0 = \pi/2$ ou encore :

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$$

I.2 Tir d'un projectile avec frottements

❑ – **5.** D'une part :

$$\left[\vec{f}\right] = [m] \times [\vec{a}] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$$

Ainsi :

$$[\alpha] = \frac{\left[\vec{f}\right]}{[\vec{v}]} = \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

La dimension de α est $\boxed{\mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-1}}$

On peut définir un temps caractéristique $\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$

Il n'y a pas de frottements en x (car pas de vitesse en x) donc pas de mouvement en x : le mouvement reste dans le plan (Oyz) comme nous allons le montrer ci-dessous.

❑ – **6.** On reprend l'étude de la question 2, en prenant en compte la force de frottement :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u_x} - \alpha \dot{y} \vec{u_y} - \alpha \dot{z} \vec{u_z}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$$

On projette cette égalité vectorielle :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -\alpha \dot{x} \\ m\ddot{y}(t) = -\alpha \dot{y} \\ m\ddot{z}(t) = -\alpha \dot{z} - mg \end{cases}$$

On introduit $\tau = m/\alpha$, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} v_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} v_y = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} v_z = -g \end{cases}$$

On résout ces équations différentielles :

$$\begin{cases} v_x(t) = A_1 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \\ v_y(t) = A_2 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \\ v_z(t) = A_3 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - g\tau \end{cases}$$

où A_1, A_2 et A_3 sont trois constantes d'intégration.

$$\begin{cases} v_x(0) = A_1 \\ v_y(0) = A_2 \\ v_z(0) = A_3 - g\tau \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = v_0 \cos(\theta_0) \\ v_z(0) = v_0 \sin(\theta_0) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = v_0 \cos(\theta_0) \\ A_3 = v_0 \sin(\theta_0) + g\tau \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = v_0 \cos(\theta_0) \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \\ v_z(t) = (v_0 \sin(\theta_0) + g\tau) \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - g\tau \end{cases}$$

On intègre une seconde fois pour obtenir les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = B_1 \\ y(t) = -v_0\tau \cos(\theta_0) \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + B_2 \\ z(t) = -\left(v_0\tau \sin(\theta_0) + g\tau^2\right) \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - g\tau t + B_3 \end{cases}$$

où B_1, B_2 et B_3 sont trois constantes d'intégration.

$$\begin{cases} x(0) = B_1 \\ y(0) = -v_0\tau \cos(\theta_0) + B_2 \\ z(0) = -\left(v_0\tau \sin(\theta_0) + g\tau^2\right) + B_3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} B_1 = 0 \\ B_2 = v_0\tau \cos(\theta_0) \\ B_3 = v_0\tau \sin(\theta_0) + g\tau^2 \end{cases}$$

Finalement, les équations horaires du mouvement sont :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0\tau \cos(\theta_0) \left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right) \\ z(t) = \left(v_0\tau \sin(\theta_0) + g\tau^2\right) \left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right) - g\tau t \end{cases}}$$

On a bien montré que $x(t) = 0$: le mouvement est plan.

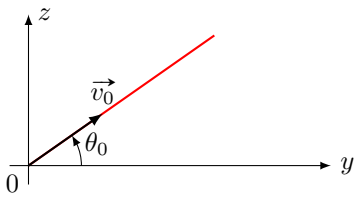
❑ – **7.** Si $t \ll \tau$, alors :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 1 - \frac{t}{\tau} \qquad \text{ainsi} \qquad 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx \frac{t}{\tau}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0 \cos(\theta_0)\ t \\ z(t) = v_0 \sin(\theta_0)\ t \end{cases}}$$

C'est le régime ballistique où l'inertie de départ domine. La trajectoire est rectiligne dans l'axe de $\overrightarrow{v_0}$:



❑ – **8.** Si $t \gg \tau$, alors :

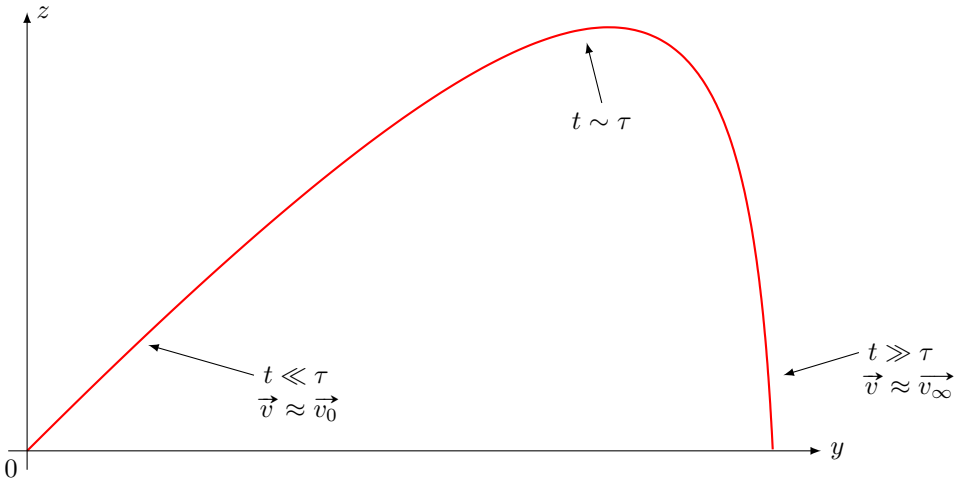
$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 0$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = v_0 \tau \cos(\theta_0) \\ z(t) = v_0 \tau \sin(\theta_0) + g\tau^2 - g\tau t \end{cases}}$$

Le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_\infty} = -g\tau\overrightarrow{u_z}$. Le projectile retombe à l'abscisse $v_0 \tau \cos\theta_0$.

❑ – **9.** Graphique :



❑ – **10.** Graphique :

I.3 La portée maximale d'un tir avec frottement

❑ – **11.** On étudie la fonction T définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{\chi \to -\infty} T(\chi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\chi \to +\infty} T(\chi) = +\infty$$

Ensuite :

$$T'(\chi) = e^\chi + \chi e^\chi = (1+\chi)\, e^\chi$$

T' s'annule si et seulement si $\chi = -1$. En $\chi = -1$:

$$T(\chi = -1) = -e^{-1}$$

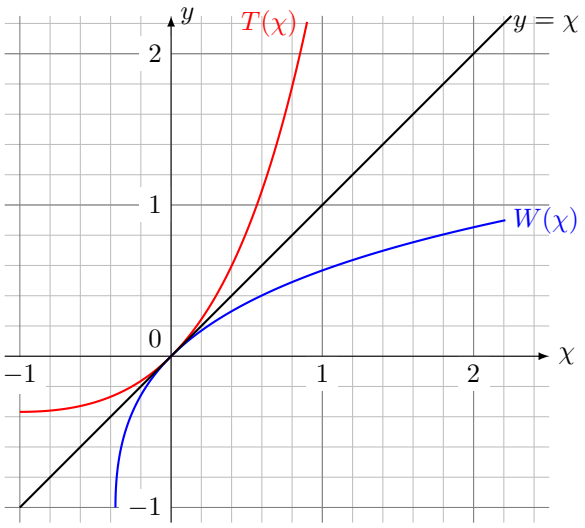
C'est un minimum (T est décroissante pour $\chi < -1$ et croissante pour $\chi > -1$). Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

On a :

$$\boxed{\beta = -e^{-1} \approx 0{,}368}$$

On restreint le graphique de T à $[-1\,;+\infty[$ (en rouge). On trace la droite d'équation $y = x$ (remarquons que c'est la tangente à la courbe en 0). W est la symétrique de T par rapport à cette droite.



❑ – **12.** On a $T(0) = 0$ donc $\boxed{W(0) = 0}$

Ensuite :

$$W(\chi + h) = W(\chi) + hW'(\chi) \qquad \text{avec} \qquad W'(\chi) = \frac{1}{\chi + \exp\left[W(\chi)\right]}$$

Programmation de la méthode d'Euler et affichage du graphique :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

tmax=2.5
h=0.0001
n=25000
t=[]
W=[]

Wi=0

for i in range(n):
    ti=i*h
    Wi=Wi+h/(ti+np.exp(Wi))
    t.append(ti)
    W.append(Wi)

plt.figure(1)
plt.plot(t,W)
plt.show()
```

❑ – **13.** Le projectile touche le sol si $z\left(t^*\right) = 0$ ou encore :

$$v_0\tau\sin\left(\theta_0\right) + g\tau^2 - \left(v_0\tau\sin\left(\theta_0\right) + g\tau^2\right)\exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right) - g\tau t^* = 0$$

Notons :

$$a = -g\tau \qquad b = v_0\tau\sin\left(\theta_0\right) + g\tau^2 \qquad c = -\left(v_0\tau\sin\left(\theta_0\right) + g\tau^2\right) \qquad d = -\frac{1}{\tau}$$

Ainsi $at^* + b + ce^{dt^*} = 0$. D'après l'énoncé, la solution est :

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{v_0\tau\sin\left(\theta_0\right) + g\tau^2}{g\tau} + \tau W\left[-\frac{v_0\sin\left(\theta_0\right) + g\tau}{g\tau}\exp\left(-\frac{v_0\sin\left(\theta_0\right) + g\tau}{g\tau}\right)\right] \\ &= \tau\left(1 + \frac{v_0\sin\left(\theta_0\right)}{g\tau} + W\left[-\left(1 + \frac{v_0\sin\left(\theta_0\right)}{g\tau}\right)\exp\left(-\left(1 + \frac{v_0\sin\left(\theta_0\right)}{g\tau}\right)\right)\right]\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{t^* = \tau \times \left(-u + W\left(ue^u\right)\right)}$$

❑ – **14.** La portée est la grandeur $l = y(t^*)$.

$$\begin{aligned} y(t^*) &= v_0\tau\cos(\theta_0)\left(1-\exp\left(u-W\left(ue^u\right)\right)\right) \\ &= v_0\tau\cos(\theta_0)\left(1-\frac{e^u}{\exp\left(W\left(ue^u\right)\right)}\right) \\ &= v_0\tau\cos(\theta_0)\left(1-\frac{W\left(ue^u\right)e^u}{W\left(ue^u\right)\exp\left(W\left(ue^u\right)\right)}\right) \end{aligned}$$

D'après la définition rappelée dans l'énoncé :

$$y(t^*) = v_0\tau\cos(\theta_0)\left(1-\frac{W\left(ue^u\right)e^u}{ue^u}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ell = v_0\tau\cos(\theta_0)\left(1-\frac{W\left(ue^u\right)}{u}\right)}$$

❑ – **15.** On calcule $\gamma = v_0/(g\tau) \approx 2{,}5$ soit :

$$\frac{\gamma^2-1}{e} \approx \frac{6{,}25-1}{2{,}7} \approx 2$$

On identifie graphiquement $W(2) \approx 0{,}86$ ainsi :

$$\boxed{\theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2-1}{e}\right)}{\gamma^2-1-W\left(\frac{\gamma^2-1}{e}\right)}\right) \approx \arcsin(0{,}5) = 30^\circ}$$

II L'intégrale elliptique de première espèce

❑ – **16.** On étudie le mouvement de la masse ponctuelle m reliée par la tige rigide au centre de rotation dans le référentiel terrestre galiléen. On utilise le repère et les notations de l'énoncé. Sur la masse s'applique, en l'absence de frottements, son poids :

$$\vec{P} = mg\vec{u_x} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$$

et la force exercée par la tige rigide :

$$\vec{T} = -T\,\vec{u_r}$$

Le mouvement est circulaire donc :

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$. On projette :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

La seconde équation est l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

❑ – **17.** Si $\theta \ll 1$, alors $\sin\theta \approx \theta$ si bien que l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

On identifie l'équation différentielle de l'oscilllateur harmonique avec $\omega_0^2 = g/\ell$ de sorte que $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. La période des oscillations est :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

La période des oscillations ne dépend pas de l'angle initial θ_0 : il y a isochronisme des oscillations.

❑ – **18.** On multiplie l'équation du mouvement question 16 par $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

On intègre :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell}\cos\theta = K$$

K est une constante. Déterminons-la à l'aide des conditions initiales. $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$ ainsi :

$$0 - \frac{g}{\ell}\cos\theta_0 = K \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \quad \text{si } \dot{\theta} > 0}$$

Ainsi, à la condition que $\dot{\theta} > 0$, on peut écrire :

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

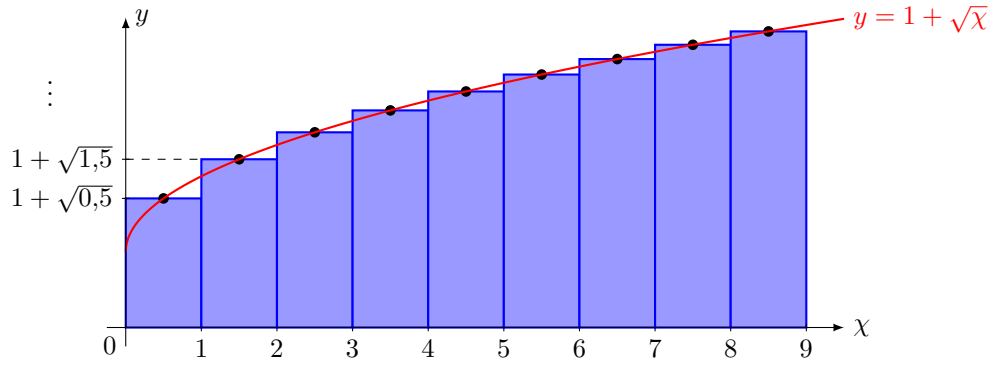
Lorsque θ passe de 0 à θ_0, un quart de période s'écoule (entre $3T/4$ et T).

$$\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = \int_{3T/4}^{T} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{T}{4}$$

or $\sqrt{g/\ell} = 2\pi/T_0$ ainsi :

$$\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = \int_{3T/4}^{T} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{T_0}\frac{T}{4} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}}$$

❑ – **19.** Méthode des rectangles médians :



On ajoute les aires de chacun des rectangles :

$$I = \sum_{i=0}^{9-1} 1 \times f\left(i + 0{,}5\right)$$

Si on divise le pas de 2, l'erreur est diminuée de $2^2 = 4$.

❑ – **20.** Code :

```
import math as m
def f(x,phi):
 return 1/(m.sqrt(1-x*m.sin(phi)**2))

S=0.
N=100
a=0.
b=m.pi/2.
pas=(b-a)/N
theta_0=m.pi/3.
x=m.sin(theta_0/2)**2
for i in range(N):
 phi=pas/2+i*pas
 S=S+f(x,phi)

print(pas*S)
```

❑ – **21.** On lit graphiquement pour $\theta_0 = 50°$:

$$\frac{T}{T_0} = 1{,}05 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T = 1{,}05 \text{ s}}$$

On s'attend à ce qu'une heure représente 3600 battements, soit $3600 \times 1{,}05 = 3780$ secondes. le décalage est de **3 minutes**.

❑ – **22.** C'est la trajectoire suivie par la valve d'une roue de vélo dans le référentiel de la route par exemple (mouvement de rotation de rayon R et de vitesse angulaire ω autour d'un axe en translation à la vitesse $R\omega$).

III La fonction d'erreur de Gauss : erf

III.1 Introduction au problème de Stefan

❑ – **23.** On ne peut pas raisonner en supposant un simple refroidissement : il faut prendre en compte un terme de source volumique résultant de la production de chaleur causée par la désintégration des noyaux radioactifs du manteau terrestre.

❑ – **24.** Le vecteur densité de flux thermique est défini par son flux à travers une surface S orientée selon la normale $\vec{n}$:

$$\boxed{\delta\phi_Q = \overrightarrow{j_Q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S\mathrm{d}t}$$

j_Q s'exprime donc en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, sa dimension est $[\mathcal{P}] \cdot \mathrm{L}^{-2} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-3}$. La loi de Fourier est :

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}T}}$$

La loi de Fourier est valable **proche de l'équilibre thermodynamique** (gradients de températures assez faibles) et d'**isotropie du milieu**. La dimension de κ est :

$$[\kappa] = \frac{[\mathcal{P}] \cdot \mathrm{L}^{-2}}{\Theta \cdot \mathrm{L}^{-1}} = [\mathcal{P}] \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \Theta^{-1} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-3} \cdot \Theta^{-1}$$

κ s'exprime en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.

❑ – **25.** Pendant $\mathrm{d}t$, la tranche reçoit $j_Q(y)S\mathrm{d}t$ du haut et perd $j_Q(y+\mathrm{d}y)S\mathrm{d}t$ par le bas ($\overrightarrow{u_y}$ est dirigé vers le bas) ainsi :

$$\boxed{\delta Q = j_Q(y)S\mathrm{d}t - j_Q(y+\mathrm{d}y)S\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial y}S\mathrm{d}y\mathrm{d}t}$$

À l'échelle mésoscopique, il y a assez d'atomes pour définir les paramètres d'état, et ainsi appliquer les lois de la thermodynamique, mais l'échelle est assez petite pour supposer ceux-ci homogènes.

On a :

$$\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T = mc\mathrm{d}T = \rho cS\mathrm{d}y\mathrm{d}T = \rho cS\mathrm{d}y\mathrm{d}t\frac{\partial T}{\partial t}$$

Il n'y a pas de travaux donc $\mathrm{d}U = \delta Q$ d'où :

$$\boxed{\delta Q = \rho cS\mathrm{d}y\mathrm{d}t\frac{\partial T}{\partial t}}$$

La loi de Fourier donne $j_Q = -\kappa\frac{\partial T}{\partial y}$ ainsi :

$$\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}S\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \rho cS\mathrm{d}y\mathrm{d}t\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\kappa}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

On identifie :

$$\boxed{D = \frac{\kappa}{\rho c}} \qquad \text{de sorte que} \qquad \boxed{D\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}}$$

La formule est homogène donc la dimension de D est $\boxed{\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-1}}$

On écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \frac{T}{L^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{t}$$

Ainsi :

$$\frac{DT}{L^2} = \frac{T}{t} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{L = \sqrt{Dt}}$$

❑ – **26.** On a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{T_0 - T_1}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{T_0 - T_1}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{D\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\theta\left(y > 0, t = 0\right) = \frac{T\left(y > 0, t = 0\right) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_1 - T_1}{T_0 - T_1} \qquad \boxed{\theta\left(y > 0, t = 0\right) = 0}$$

$$\theta\left(y = 0, t > 0\right) = \frac{T\left(y = 0, t > 0\right) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_1} \qquad \boxed{\theta\left(y = 0, t > 0\right) = 1}$$

$$\theta\left(y \to \infty, t > 0\right) = \frac{T\left(y \to \infty, t > 0\right) - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_1 - T_1}{T_0 - T_1} \qquad \boxed{\theta\left(y \to \infty, t > 0\right) = 0}$$

❑ – **27.** On a :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{y}{2\sqrt{D}}\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\eta) = -\frac{\eta}{2t}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\eta)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\eta)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{Dt}\right)^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}(\eta)$$

Donc :

$$D\frac{1}{4Dt}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}(\eta) = -\frac{\eta}{2t}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\eta)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}(\eta) + 2\eta\frac{\partial\theta}{\partial\eta}(\eta) = 0}$$

❑ – **28.** On a immédiatement :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + 2\eta\varphi = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\varphi(\eta) = A\exp\left(-\eta^2\right)$$

Pour trouver la valeur de A, considérons :

$$\int_0^{+\infty}\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta = [\theta(\eta)]_0^{+\infty} = \theta\left(y\to\infty, t>0\right) - \theta\left(y=0, t>0\right) = -1$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} A\exp\left(-\eta^2\right)\mathrm{d}\eta = A\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc $A = -2/\sqrt{\pi}$ d'où :

$$\boxed{\varphi(\eta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\eta^2\right)}$$

Ensuite :

$$\theta(\eta) = \theta_0 + \int_0^{\eta}\varphi(z)\mathrm{d}z$$

Or $\theta(0) = \theta\left(y=0, t>0\right) = 1$ donc :

$$\boxed{\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}\exp\left(-z^2\right)\mathrm{d}z}$$

Enfin

$$T(y,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\theta(y,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\theta\left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

$$T(y,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{y}{2\sqrt{Dt}}}\exp\left(-z^2\right)\mathrm{d}z\right]$$

$$\boxed{T(y,t) = T_0 + \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{y}{2\sqrt{Dt}}}\exp\left(-z^2\right)\mathrm{d}z}$$

III.2 Formation d'une croûte de lave solide

❑ – **29.** On repart de $\varphi(\eta) = A'\exp\left(-\eta^2\right)$. Pour trouver la valeur de A', on utilise les nouvelles conditions aux limites :
— $T(\lambda) = T_f$ donc $\theta(\lambda) = 1$;
— $\theta(0) = \theta(y=0, t>0) = \frac{T_0 - T_0}{T_f - T_0} = 0$

Or, en intégrant φ, on obtient :

$$\theta(\eta) = \theta(0) + A' \int_0^\eta \exp\left(-z^2\right) \mathrm{d}z = \theta(0) + A' \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(\eta)$$

Ainsi :

$$A' \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\mathrm{erf}(\lambda)} = \frac{1}{\mathrm{erf}(\lambda)}$$

D'où :

$$\boxed{\theta(\eta) = \frac{\mathrm{erf}(\eta)}{\mathrm{erf}(\lambda)}}$$

❑ – **30.** On suppose la transformation monobare, lors du passage de l'état liquide à l'état solide, le transfert thermique reçu par le fluide est :

$$\mathrm{d}H = m\Delta h_{\mathrm{liq}\to\mathrm{sol}}\left(T_f\right)$$

Le transfert thermique cédé est donc :

$$\delta Q = -\mathrm{d}H = -m\Delta h_{\mathrm{liq}\to\mathrm{sol}}\left(T_f\right) = m\Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right)$$

Or $m = \rho S \mathrm{d}y_\mathrm{S}$ donc :

$$\boxed{\delta Q = \rho S \mathrm{d}y_\mathrm{S} \Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right)}$$

❑ – **31.** L'énergie cédée par la tranche vers le haut par diffusion thermique est :

$$-j_Q\left(y = y_\mathrm{S}\right) S \mathrm{d}t$$

D'après la loi de Fourier :

$$j_Q\left(y = y_\mathrm{S}\right) = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y_\mathrm{S}}$$

L'énergie libérée par la solidification s'échappe par diffusion thermique :

$$\rho S \mathrm{d}y_\mathrm{S} \Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right) = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y_\mathrm{S}} S \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\rho \Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right) \frac{\mathrm{d}y_\mathrm{S}}{\mathrm{d}t} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y_\mathrm{S}}}$$

❑ – **32.** On a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y_\mathrm{S}} = \left(T_f - T_0\right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \left(T_f - T_0\right) \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

or :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{erf}(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y_\mathrm{S}} = \frac{T_f - T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\mathrm{erf}(\lambda)}$$

Et, comme $y_\mathrm{S}(t) = 2\lambda\sqrt{Dt}$:

$$\frac{\partial y_\mathrm{S}}{\partial t} = 2\lambda \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{t}} = \lambda \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{t}}$$

Ainsi, on injecte dans l'équation question 31 :

$$\rho\lambda \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{t}} \Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right) = -\kappa \frac{T_f - T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\mathrm{erf}(\lambda)}$$

$$\frac{\rho D}{\kappa} \frac{\sqrt{\pi}}{T_f - T_0} \Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \mathrm{erf}(\lambda)}$$

Or $D = \kappa/(\rho c)$ donc $\rho D/\kappa = 1/c$ d'où :

$$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{c\left(T_f - T_0\right)} \Delta h_{\mathrm{sol}\to\mathrm{liq}}\left(T_f\right) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \mathrm{erf}(\lambda)}}$$

❑ – **33.** La grandeur :

$$X = \frac{\sqrt{\pi}}{c\,(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol}\to\text{liq}}\,(T_f)$$

est une constante numérique. Il s'agit de trouver à quel moment la fonction $F : \lambda \mapsto \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \text{erf}(\lambda)}$ atteint cette constante. On peut procéder par **dichotomie**. Le principe est le suivante.

1. on considère deux points de départ λ_d et λ_f tels que $F\,(\lambda_i) > X$ et $F\,(\lambda_f) < X$.
2. On évalue $F\left(\frac{\lambda_i+\lambda_f}{2}\right)$
   — si la valeur obtenue est plus petite que X, alors la solution est entre λ_i et $\frac{\lambda_i+\lambda_f}{2}$. On remplace λ_f par $\frac{\lambda_i+\lambda_f}{2}$.
   — si la valeur obtenue est plus grande que X, alors la solution est entre $\frac{\lambda_i+\lambda_f}{2}$ et λ_f. On remplace λ_i par $\frac{\lambda_i+\lambda_f}{2}$.
3. On renouvelle l'opération jusqu'à ce que l'intervalle $\lambda_f - \lambda_i$ soit assez petit.

On peut aussi utiliser la méthode des tangentes de Newton qui converge plus rapidement.

❑ – **34.** On a :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{c\,(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol}\to\text{liq}}\,(T_f) = 0{,}708$$

L'antécédant de 0,708 par $\lambda \mapsto \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \text{erf}(\lambda)}$ est environ égal à $\boxed{\lambda = 0{,}8}$ d'après la représentation graphique.

Pour estimer l'épaisseur de la croûte, on calcule :

$$\boxed{y_s = 2\lambda\sqrt{Dt} = 2 \times 0{,}8 \times \sqrt{7 \cdot 10^{-7} \times 180 \times 24 \times 3600} \approx 5{,}3 \text{ m}}$$

Graphiquement, on lit un résultat du même ordre (qui concorde surtout avec Makaopuhi).