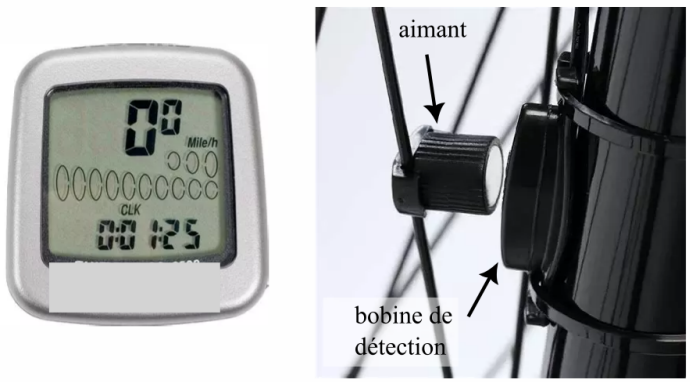
DM 06

I. Induction

1 - Problème

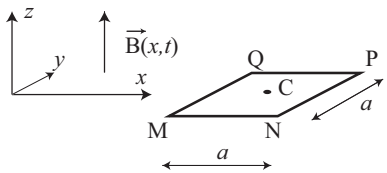
Un compteur de vélo utilise un aimant de diamètre $d = 1\,\text{cm}$ fixé à la roue. Lorsque le vélo avance, l'aimant passe devant un détecteur assimilé à une bobine de N = 100 spires de même diamètre d. On estime que le champ magnétique crée par l'aimant est voisin de $B = 10\,\text{mT}$ à proximité de la bobine.



Estimer l'amplitude de la tension aux bornes de la bobine de détection lorsque l'aimant possède une vitesse de $v = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 - Moteur linéaire

Le moteur linéaire à induction produit un déplacement de translation grâce à la production d'un champ magnétique glissant. La partie qui se translate utilise uniquement l'induction et ne nécessite pas de transporter de générateur. Ce type de moteur est utilisé par exemple dans la propulsion des trains à haute vitesse comme ci-dessous, le train japonais MLX01-01 (image sous licence Creative Commons 3.0).



Un cadre rectangulaire $\mathcal{C}$ (l'induit) de masse m est constitué par les points MNPQ de centre C et de côtés MN = QP = a et QM = PN = a. Ce cadre reste dans le plan $z = 0$ et se translate, par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de centre O, à la vitesse $v_C = \dot{x}_C\,\vec{e}_x$. Le centre C d'abscisse x_C reste sur l'axe Ox et les côtés MN et QP restent parallèles à Oy. En $t = 0$, le centre du cadre $\mathcal{C}$ passe par l'origine du système de coordonnées O. On note R la résistance interne de l'induit $\mathcal{C}$.

Un ensemble d'électroaimants situés le long de l'axe Ox dans lesquels les courants sont déphasés forme l'inducteur. Il crée dans le référentiel R un champ électromagnétique « glissant »à la vitesse v_s :

$$\vec{B} = B_0\cos(\omega(t - x/v_S))\,\vec{e}_z$$

☐ **Q 1 -** Calculer le flux du champ magnétique à travers la spire MNPQ pour une position x_C quelconque de la spire. On supposera que $v_s/\omega \gg a$.

☐ **Q 2 -** Dans le cas d'un déplacement à vitesse constante, $\dot{x}_C = v_0$ déterminer l'expression de la f.e.m d'induction en fonction de B_0, a, ω, x_C v_s et v_0.

☐ **Q 3 -** Déterminer l'expression du courant circulant $i(t)$ circulant dans l'induit. On précisera avec soin l'orientation du courant sur un schéma clair.

☐ **Q 4 -** Évaluer la force de Laplace sur chacun les cotés NP et QM.

☐ **Q 5 -** Montrer que la résultante de la force de Laplace sur le cadre $\mathcal{C}$ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{F}_{lap} = 2\frac{\omega^2 a^4 B_0^2}{2Rv_S}\left(1 - \frac{v_0}{v_S}\right)\sin^2\left(\omega(1 - v_0/v_S)t\right)\vec{e}_x$$

☐ **Q 6 -** Déterminer la valeur moyenne de la résultante et en déduire si le mouvement est ralenti ou accéléré.

☐ **Q 7 -** Justifier par un argument physique sur le flux de champ magnétique, le fait que $\vec{F}_{lap} = \vec{0}$ si $v_0 = v_S$.

☐ **Q 8 -** Évaluer la puissance moyenne de la force de Laplace $< \mathcal{P}_{Laplace} >$ pour un déplacement à vitesse constante v_0.

☐ **Q 9 -** Évaluer la puissance moyenne dissipée dans la résistance $< \mathcal{P}_J >$.

☐ **Q 10 -** À l'aide d'un bilan de puissance, conclure sur la vitesse maximale du circuit en fonction de v_s.

Données : $\cos(p) - \cos(q) = -2.\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p-q}{2})$

II. Utilisation des nanoparticules d'or en catalyse hétérogène

Les nanoparticules sont des objets dont les trois dimensions sont inférieures à 100 nm. Ces nano-objets se situent donc au confluent des échelles macroscopique (matériaux massifs) et moléculaire (ou atomistique). D'un point de vue fondamental, l'étude des nanoparticules apparaît essentielle afin d'élargir notre compréhension de la matière. Toutefois, l'intérêt de la communauté scientifique pour les nanoparticules ne s'arrête pas là. En effet, ces nanomatériaux présentent des propriétés particulières et originales attribuables à des effets de taille. Ainsi, certaines nanoparticules semi-conductrices (quantum dots) présentent un élargissement de l'écart entre les bandes de valence et de conduction lorsque leur taille décroît, leur conférant des propriétés optiques originales. Les nanoparticules de métaux nobles (Au, Ag, Pt) montrent une forte bande d'extinction dans le domaine visible (bande plasmon). En outre, ces objets nanométriques sont assimilables à des briques de base vers la construction de dispositifs fonctionnels de tailles micrométriques. On note leur utilisation dans des domaines aussi divers que la santé (crèmes solaires, cosmétiques...), la biologie, le photovoltaïque, le stockage de l'information, l'imagerie, l'électronique ou encore la catalyse.

1 - Influences de la température, de la pression

On étudie l'équilibre chimique résultant de l'oxydation du monoxyde de carbone par le dioxygène. Toutes les espèces chimiques considérées sont en phase gazeuse à la température T et à la pression totale P fixées et sont assimilées à des gaz parfaits.

☐ **Q 11 -** Écrire l'équation de la réaction qui modélise l'oxydation en phase gazeuse du monoxyde de carbone en dioxyde de carbone en se ramenant à une mole de dioxygène.

☐ **Q 12 -** Calculer la valeur de la constante thermodynamique $K^\circ(T)$ de cet équilibre chimique dans le cas particulier où $T = 298\,K$.

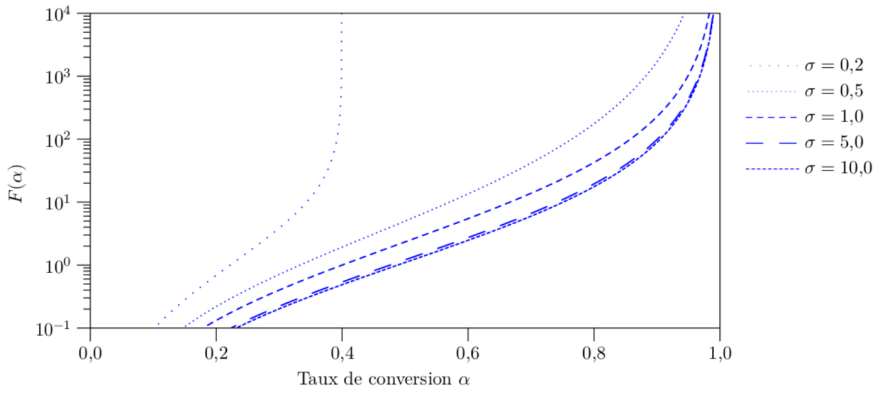
☐ **Q 13 -** L'état initial est constitué d'un mélange idéal de monoxyde de carbone et de dioxygène gazeux seulement. On définit la proportion initiale de dixoygène par le paramètre σ, égal au rapport de la quantité initiale de dioxygène sur la quantité initiale de monoxyde de carbone. On définit aussi le taux de conversion du monoxyde de carbone comme étant la quantité de monoxyde de carbone qui a réagi, rapportée à la quantité initiale de monoxyde de carbone. On le note α et α_e sa valeur à l'équilibre chimique. Montrer que la constante d'équilibre de cet équilibre a pour expression :

$$K^\circ = \frac{p^\circ}{p}\frac{(\sigma + 1 - \alpha_2/2)\alpha_e^2}{(\sigma - \alpha_e/2)(1-\alpha_e)^2}$$

☐ **Q 14 -** Établir la relation qui lie le taux de conversion du monoxyde de carbone à l'équilibre α_e à la constante thermodynamique d'équilibre $K^\circ(T)$ à la température T, à la pression totale P du mélange gazeux, à la pression standard P° et à la proportion initiale de dioxygène σ.

☐ **Q 15 -** Indiquer en justifiant quelles sont les conditions de température et de pression qui favorisent l'oxydation du monoxyde de carbone. Dans ces conditions, discuter de l'intérêt d'utiliser un catalyseur.

Le graphe de la figure ci-dessous représente les variations de la fonction $F : \alpha \mapsto \frac{\alpha^2(1+\sigma-\alpha/2)}{(1-\alpha)^2(\sigma-\alpha/2)}$ en fonction de α pour différentes valeurs de σ, dans une échelle semi-logarithmique.



☐ **Q 16 -** Indiquer comment il convient de choisir la proportion initiale de dioxygène σ pour favoriser l'oxydation du monoxyde de carbone.

III. Imagerie des nano-particules d'or

Les nanoparticules sont trop petites pour être visualisées avec un microscope. Des techniques d'imagerie indirecte sont donc développées pour les détecter. Une équipe de l'université Bordeaux 1 a mis au point il y a une quinzaine d'années une technique de microscopie photothermique qui permet de détecter et de localiser, dans un échantillon, des particules d'or dont le rayon n'excède pas quelques nanomètres. Une étape de ce protocole consiste à chauffer la particule par un faisceau laser et fait l'objet de cette partie. On considère une sphère d'or, de rayon $a = 10\,\text{nm}$, immobilisée dans un gel constitué très majoritairement d'eau, et chauffée par un faisceau laser. Le milieu (le gel) entourant la sphère est considéré comme homogène, infini et initialement à la température T_0. On note κ la conductivité thermique du milieu et C_g sa capacité thermique volumique. On supposera que, dans le domaine de températures exploré, ces grandeurs sont indépendantes de la température. On note P_{abs} la puissance totale absorbée par la sphère et C_{Au} la capacité thermique volumique de l'or.

Compte tenu de la taille de la nanosphère, on admet que sa température est partout égale à sa température de surface, que l'on note $T_s(t)$.

On suppose que le contact thermique entre le gel et la nanoparticule est parfait donc que $T(a^+,t) = T_s(t)$.

1 - Équation de la diffusion thermique

☐ **Q 17 -** Énoncer la loi de Fourier de la diffusion thermique, en précisant l'unité dans le système international de chaque grandeur intervenant dans cette loi.

☐ **Q 18 -** Montrer, à l'aide d'un argument simple, que la température T en un point du milieu ne dépend spatialement que de r, distance séparant le centre de la nanosphère du point considéré.

☐ **Q 19 -** Effectuer un bilan énergétique entre t et $t+dt$ pour un système bien choisi et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(r,t)$ dans le milieu :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = \frac{\kappa}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)(r,t)$$

2 - Température dans le milieu en régime stationnaire

On se place en régime stationnaire, c'est-à-dire que les températures de la sphère et du milieu ne dépendent pas du temps.

☐ **Q 20 -** Établir l'expression de la température $T(r)$ dans le milieu en fonction de a, r, T_0, T_s.

☐ **Q 21 -** En déduire l'expression de la puissance fournie par la nanosphère au milieu extérieur, $P_{sph\to milieu}$, en fonction de a, κ et $\delta T_s = T_s - T_0$ sous la forme :

$$P_{sph\to milieu} = 4\pi a \kappa \delta T_s$$

3 - Température de surface de la nanosphère

On suppose maintenant que l'intensité du faisceau laser chauffant la nanosphère d'or est modulée sinusoïdalement, la puissance absorbée par la sphère étant donnée par :

$$P_{abs} = P_0(1+\cos(\Omega t))$$

où P_0 est une constante positive. On admet que l'expression de $P_{sph\to milieu}$ établie précédemment est valable même en régime variable.

☐ **Q 22 -** En effectuant un bilan énergétique pour la nanosphère entre t et $t+dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par δT_s et la mettre sous la forme :

$$\delta T_s + \tau \frac{\partial \delta T_s}{\partial t} = \frac{P_{abs}(t)}{4\pi\kappa a}$$

où τ est une constante dont on donnera l'expression en fonction des données du problème et dont on vérifiera qu'elle est bien homogène à un temps.

On donne $P_0 = 0{,}375\,\mu\text{W}$ et $\dfrac{\Omega}{2\pi} = 700\,\text{kHz}$

☐ **Q 23 -** Justifier que la température $T_s(t)$ se met sous la forme approchée :

$$T_s(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi\kappa a}(1+\cos(\Omega t))$$

☐ **Q 24 -** Donner l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T_s}$ de la température de la surface de la sphère et calculer sa valeur.

Données :

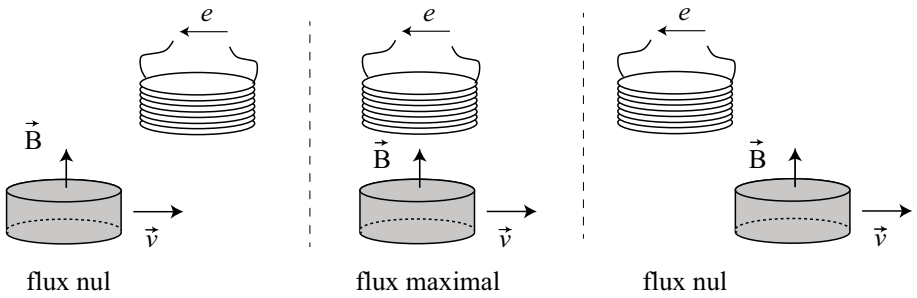
- Capacité thermique volumique de l'or : $C_{Au} = 2{,}5 \cdot 10^6\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$
- Conductivité thermique du gel : $\kappa = 0{,}6\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Capacité thermique volumique du gel : $C_g = 4{,}2 \cdot 10^6\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$

Données thermodynamiques à 298 K

	O_2(g)	CO(g)	CO_2(g)
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^o$ (kJ·mol^{-1})		–110,6	–393,5
Entropie molaire standard S^o (J·K^{-1}·mol^{-1})	204,8	197,6	213,7

Le mouvement de l'aimant à proximité de la bobine donne lieu au phénomène d'induction. Il faut donc estimer la variation de flux de champ magnétique à travers la bobine.
Lorsque l'aimant est loin de la bobine le champ magnétique est nul et lorsqu'il est en face de la bobine, le champ magnétique vaut $\mathrm{B} = 10\,\mathrm{mT}$. Le temps caractéristique de fluctuation du champ magnétique est donné par le temps de passage de l'aimant en face de la bobine :

$$\Delta t = \frac{d}{v} =_{\mathrm{S}} \mathrm{I}0{,}01ms$$



Le flux de champ magnétique à travers les N spires de la bobine vaut alors :

$$\Phi_{bobine} = \mathrm{N} \times \mathrm{B} \times \frac{\pi d^2}{4}$$

La f.e.m induite à ces bornes est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{bobine}}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\mathrm{N} \times \mathrm{B} \times \frac{\pi d^2}{4}}{\Delta t}$$

En utilisant les valeurs fournies, on obtient : $e \sim 9\,\mathrm{mV}$.
Cette tension est très faible et nécessite une amplification pour être traitée par le compteur. En réalité la bobine de détection comporte un noyau de ferrite dont les propriétés sont modifiées au passage de l'aimant.

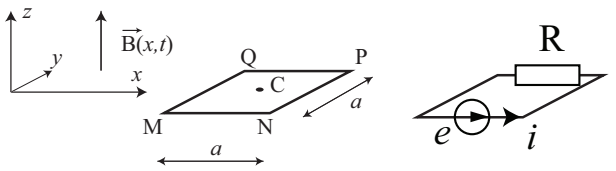
☐ **Q 1 -** Le champ magnétique est perpendiculaire à la spire et son flux peut être considéré comme uniforme sur la spire car $a \ll v_{\mathrm{S}}/\omega$.

$$\Phi_{\mathrm{S}}(\vec{\mathrm{B}}) = \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{B}}.\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = a^2 \mathrm{B}_0 \cos(\omega(t - x_{\mathrm{C}}/v_{\mathrm{S}}))$$

☐ **Q 2 -** Le circuit se déplaçant à vitesse constante, remplaçons l'expression de $x_c(t)$ par $v_0 t$. D'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{S}}(\vec{\mathrm{B}})}{\mathrm{d}t} = \omega\Big(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\Big) a^2 \mathrm{B}_0 \sin\big(\omega(1 - v_0/v_{\mathrm{S}})t\big)$$

☐ **Q 3 -** Le circuit électrique équivalent est donné par :



On en déduit que

$$i = \frac{e}{\mathrm{R}} = \frac{\omega \mathrm{B}_0 a^2}{\mathrm{R}} \Big(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\Big) \sin\big(\omega(1 - v_0/v_{\mathrm{S}})t\big)$$

☐ **Q 4 -** Évaluons la force de Laplace sur chaque côté :

- $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}ap}(\mathrm{NP}) = i(t)\vec{\mathrm{NP}} \wedge \vec{\mathrm{B}} = i(t) a \mathrm{B}(x_c + a/2)\,\vec{e}_x$
- $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}ap}(\mathrm{QM}) = i(t)\vec{\mathrm{QM}} \wedge \vec{\mathrm{B}} = -i(t) a \mathrm{B}(x_c - a/2)\,\vec{e}_x$

☐ **Q 5 -** Par symétrie la force de Laplace sur les côtés MN et PQ sont opposées, on en déduit que la résultante est :

$$\vec{\mathrm{F}}_{lap} = i(t) a \mathrm{B}(x_c + a/2)\,\vec{e}_x - i(t) a \mathrm{B}(x_c - a/2)\,\vec{e}_x$$

En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient :

$$\vec{\mathrm{F}}_{lap} = 2i(t) a \mathrm{B}_0 \sin(\omega(t - x_{\mathrm{C}}/v_{\mathrm{S}})) \sin \omega a/2v_{\mathrm{S}}\,\vec{e}_x$$

En utilisant l'approximation $\sin \omega a/2v_{\mathrm{S}} \approx \omega a/2v_{\mathrm{S}}$, il vient :

$$\vec{\mathrm{F}}_{lap} = 2i(t) \frac{\omega a^2 \mathrm{B}_0}{v_{\mathrm{S}}} \sin(\omega(t - x_{\mathrm{C}}/v_{\mathrm{S}}))\,\vec{e}_x$$

En remplaçant le courant et l'expression de x_c, nous obtenons :

$$\vec{\mathrm{F}}_{lap} = 2i(t) \frac{\omega^2 a^4 \mathrm{B}_0^2}{2\mathrm{R}v_{\mathrm{S}}} \Big(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\Big) \sin^2\big(\omega(1 - v_0/v_{\mathrm{S}})t\big)\,\vec{e}_x$$

☐ **Q 6 -** En évaluant la valeur moyenne avec $< \sin^2 >= 1/2$, on obtient :

$$< \vec{\mathrm{F}}_{lap} >= \frac{\omega^2 a^4 \mathrm{B}_0^2}{2\mathrm{R}v_{\mathrm{S}}} \Big(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\Big)\,\vec{e}_x$$

Le mouvement est donc accéléré.
☐ **Q 7 -** Si $v_{\mathrm{S}} = v_0$, le circuit se déplace avec le champ magnétique, il n'y a pas de variation de flux sur le circuit. La f.e.m et donc le courant sont nuls.
☐ **Q 8 -** Par définition de la puissance :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{L}aplace} = \vec{\mathrm{F}}_{lap}.\vec{v} = \mathrm{F}_{lap} v_0 \quad \text{soit} \quad < \mathcal{P}_{\mathrm{L}aplace} >= \frac{\omega^2 a^4 \mathrm{B}_0^2}{2\mathrm{R}} \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}} \Big(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\Big)$$

☐ **Q 9 -** La puissance dissipée dans la résistance est donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \mathrm{R}i^2 = \frac{\omega^2 \mathrm{B}_0^2 a^4}{\mathrm{R}}\left(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\right)^2 \sin^2\left(\omega(1 - v_0/v_{\mathrm{S}})t\right)$$

d'où
$$< \mathcal{P}_{\mathrm{J}} >= \frac{\omega^2 \mathrm{B}_0^2 a^4}{2\mathrm{R}}\left(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\right)^2$$

☐ **Q 10 -** Lorsque la vitesse limite est atteinte, toute la puissance de la force de Laplace est dissipée dans la résistance, on en déduit que :

$$< \mathcal{P}_{\mathrm{J}} >=< \mathcal{P}_{Laplace} > \quad \text{soit} \quad \left(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\right)^2 = \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\left(1 - \frac{v_0}{v_{\mathrm{S}}}\right)$$

On en déduit qu'en fonctionnement : $v_0 = \dfrac{v_s}{2}$.

Chimie

☐ **Q 11 -** L'équation de la transformation s'écrit :

$$2\mathrm{CO}_{(g)} + \mathrm{O}_{2(g)} = 2\mathrm{CO}_{2(g)}$$

☐ **Q 12 -** On sait que $\Delta_r\mathrm{G}^\circ = \Delta_r\mathrm{H}^\circ - \mathrm{T}\Delta_r\mathrm{S}^\circ$. De plus, d'après la loi de Hess, on calcule successivement :
$\Delta_r\mathrm{H}^\circ = -566\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ et $\Delta_r\mathrm{S}^\circ = -172{,}6\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$, soit à 298K :

$$\Delta_r\mathrm{G}^\circ = -514\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$$

On sait enfin que $\Delta_r\mathrm{G}^\circ = -\mathrm{RT}\ln(\mathrm{K}^\circ)$, soit :

$$\mathrm{K}^\circ = \exp\left(\frac{-\Delta_r\mathrm{G}^\circ}{\mathrm{RT}}\right) = 1{,}4\cdot 10^{90}$$

La transformation peut être considérée comme totale.

☐ **Q 13 -** D'après les définitions fournies, $\sigma = \dfrac{n_i(\mathrm{O}_2)}{n_i(\mathrm{CO})}$ et $\alpha_e = \dfrac{n_i(\mathrm{CO}) - n_f(\mathrm{CO})}{n_i(\mathrm{CO})}$.
On dresse alors le tableau d'avancement de la réaction :

	$2\mathrm{CO}_{(g)}$ +	$\mathrm{O}_{2(g)}$ =	2 $\mathrm{CO}_{2(g)}$
Etat initial	n_0	σn_0	0
Etat quelconque (avancement $n_0\alpha_e/2$)	$(1-\alpha)n_0$	$\sigma n_0 - \alpha n_0/2$	αn_0

A l'équilibre, le quotient réactionnel est égal à la constante d'équilibre (loi de Guldberg et Waage).

On a ainsi $\mathrm{K}^\circ = \dfrac{a(\mathrm{CO}_2)^2}{a(\mathrm{CO})^2 a(\mathrm{O}_2)}$ avec les activités exprimées à l'équilibre chimique.

Or pour un gaz parfait, $a(gaz) = \dfrac{p_i}{p^\circ} = \dfrac{n_i}{n_{\mathrm{tot,gaz}}}\dfrac{p}{p^\circ}$. Ainsi, après calcul, on obtient :

$$\mathrm{K} = \frac{p^\circ}{p}\frac{n_{\mathrm{tot,gaz}}.n(\mathrm{CO}_2)^2}{n(\mathrm{CO})^2 n(\mathrm{O}_2)}$$

☐ **Q 14 -** En reportant les quantités de matière obtenues dans le tableau d'avancement, on trouve finalement :

$$\mathrm{K}^\circ = \frac{p^\circ}{p}\frac{(\sigma + 1 - \alpha_2/2)\alpha_e^2}{(\sigma - \alpha_e/2)(1-\alpha_e)^2}$$

☐ **Q 15 -**

- Influence de T : d'après la loi de Van't Hoff, on a $\frac{d\ln(\mathrm{K}^\circ)}{d\mathrm{T}} = \dfrac{\Delta_r\mathrm{H}^\circ}{\mathrm{RT}^2}$. Ainsi, une augmentation de température diminue la valeur de K° car $\Delta_r\mathrm{H}^\circ < 0$ pour cet équilibre, donc augmenter T déplace l'équilibre dans le sens d'une plus grande stabilité de CO : c'est donc défavorable à son oxydation.

  L'oxydation de CO est donc favorisée à basse température.

- Influence de p : partant d'un état initial à l'équilibren on a $\mathrm{Q}_r = \mathrm{K}^\circ$. Une augmentation de p diminue Q_r... alors K°, qui ne dépend que de T, reste identique. Ainsi, l'évolution ultérieure du système se fera dans le sens direct pour revenir à l'équilibre, ce qui favorise l'oxydation de CO.

  L'oxydation de CO est donc favorisée à haute pression.

Comme une augmentation de T est défavorable à l'oxydation de CO, l'utilisation d'un catalyseur est sans doute indispensable pour accélérer la réaction (critère cinétique) tout en gardant un rendement suffisant.

☐ **Q 16 -** Favoriser l'oxydation de revient à rendre α_e maximal. D'après les questions précédentes, $\mathrm{K}^\circ(\mathrm{T}) = \dfrac{p^\circ}{p}\mathrm{F}(\alpha_e)$. d'où $\mathrm{F}(\alpha_e) = \mathrm{K}^\circ(\mathrm{T})\dfrac{p}{p^\circ} = \mathrm{C}ste$ indépendante de α_e.
En représentant cette constante sur le graphique (de façon arbitraire, car T et p ne sont pas précisés), on voit immédiatement que pour maximiser α (qui se lit sur l'axe des abscisses), on doit choisir σ le plus grand possible. Cependant un σ trop élevé peut conduire à une surconsommation de dioxygène : un compromis doit sans doute être trouvé, d'autant plus que la différence entre $\sigma = 5$ et $\sigma = 10$ semble marginale. $\sigma = 5$ semble donc être un bon compromis.

Diffusion thermique

☐ **Q 17 -** Loi de Fourier : $\overrightarrow{j_{\text{th}}} = -\kappa \vec{\text{grad}}\,\text{T}$

- $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ est le vecteur densité de courant thermique en W.m^{-2}
- $\vec{\text{grad}}\,\text{T}$ est le gradient du champ de température en K.m^{-1}
- κ est la conductivité thermique du milieu en $\text{W.K}^{-1}\text{.m}^{-1}$

☐ **Q 18 -** La source d'énergie thermique (nanosphère) a une température de surface qui possède une invariance par rotation quelconque autour de son centre. La température dans le milieu est donc nécessairement indépendante de θ et φ (coordonnées sphériques) et ainsi :

$$\text{T(M)} = \text{T}(r,t)$$

☐ **Q 19 -** Il s'agit d'un bilan très classique en géométrie sphériques, fait en cours. On s'y reportera pour les détails.

☐ **Q 20 -** En régime stationnaire T est indépendant du temps et $\text{T}(r)$ vérifie ainsi l'équation :

$$\Delta\text{T} = 0$$

On intègre :

$$\frac{\partial r\text{T}}{\partial r} = \text{C}$$

On réintègre une nouvelle fois :

$$r\text{T} = \text{C}r + \text{C}_2 \text{ soit } \text{T}(r) = \text{C} + \frac{\text{C}_2}{r}$$

On utilise alors les conditions aux limites pour déterminer les constantes : $\text{T}(a) = \text{T}_s$ et $\text{T}(r \to +\infty) = \text{T}_0$, ce qui conduit à :

$$\text{T}(r) = \text{T}_0 + \frac{a(\text{T}_s - \text{T}_0)}{r}$$

☐ **Q 21 -** On peut calculer la puissance fournie par la sphère en calculant le flux de $\overrightarrow{j}_{\text{th}}$ à la surface de la sphère. En utilisant le flux de $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ à la surface de la sphère :

$$\text{P}_{\text{sph}\to\text{milieu}} = \iint_{\text{sph}} \overrightarrow{j_{\text{th}}}.\overrightarrow{d\text{S}} = j_{\text{th}}(r=a)4\pi a^2$$

Or $j_{\text{th}}(r=a) = -\kappa\dfrac{\partial \text{T}}{\partial r}(r=a) = \kappa\dfrac{\text{T}_s - \text{T}_0}{a}$, soit finalement :

$$\text{P}_{\text{sph}\to\text{milieu}} = \kappa\frac{\text{T}_s - \text{T}_0}{a}4\pi a^2 = 4\pi a\kappa\delta\text{T}_s$$

☐ **Q 22 -** Pendant le temps dt, la sphère reçoit l'énergie $\text{P}_{\text{abs}}dt$ de la part du Laser et perd l'énergie $\text{P}_{\text{sph}\to\text{milieu}}dt$ par conduction dans le milieu. Le premier principe à la sphère entière s'écrit alors, en notant $\text{V}_{\text{sph}} = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ le volume de la nanosphère :

$$d\text{U} = \text{P}_{\text{abs}}dt - \text{P}_{\text{sph}\to\text{milieu}}dt$$

$$\text{C}_{\text{Au}}\text{V}_{\text{sph}}(\text{T}_s(t+dt) - \text{T}_s(t)) = \text{P}_{\text{abs}}(t)dt - 4\pi a\kappa\delta\text{T}_s dt$$

$$\frac{\text{C}_{\text{Au}}\dfrac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a\kappa}\frac{\partial \text{T}_s}{\partial t} + \delta\text{T}_s = \text{P}_{\text{abs}}(t)$$

Enfin, on remarque que comme $\delta\text{T}_s = \text{T}_s - \text{T}_0$ avec $\text{T}_0 = \text{C}^{\text{ste}}$, on a $\dfrac{\partial \text{T}_s}{\partial t} = \dfrac{\partial \delta\text{T}_s}{\partial t}$. En posant $\tau = \dfrac{\text{C}_{\text{Au}}a^2}{3\kappa}$, on obtient alors l'équation demandée :

$$\delta\text{T}_s + \tau\frac{\partial \delta\text{T}_s}{\partial t} = \frac{\text{P}_{\text{abs}}(t)}{4\pi\kappa a}$$

Vérifions que $\dfrac{\text{C}_{\text{Au}}a^2}{3\kappa}$ est homogène à un temps :

$[\text{C}_{\text{Au}}] = [\text{E}][\Theta]^{-1}\text{L}^{-3}$; $[a^2] = \text{L}^2$; $[\kappa] = [\text{P}]\text{L}^{-1}[\Theta]^{-1}$, soit $\dfrac{\text{C}_{\text{Au}}a^2}{3\kappa} = \dfrac{[\text{E}]}{[\text{P}]} = \text{T}$. τ est donc bien homogène à un temps.

☐ **Q 23 -** L'équation vérifiée par δT_s est une équation différentielle d'ordre 1. La pulsation de coupure de ce système est $\omega_c = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{3\kappa}{\text{C}_{\text{Au}}a^2}$, soit une fréquence de coupure de $f_c = \dfrac{3\kappa}{2\pi\text{C}_{\text{Au}}a^2}$ Application numérique : $f_c = 1{,}1\,\text{GHz}$

On en déduit que pour une excitation de fréquence $\dfrac{\Omega}{2\pi} = 700\,\text{kHz}$ très inférieure à la fréquence de coupure, on se situe dans la bande passante du système. Le signal d'excitation (= second membre ici) possédant cette fréquence, il est donc très peu modifié, et on en déduit que $\delta\text{T}_s \approx \dfrac{\text{P}_{\text{abs}}(t)}{4\pi\kappa a}$, soit :

$$\text{T}_s = \text{T}_0 + \frac{\text{P}_{\text{abs}}(t)}{4\pi\kappa a}$$

☐ **Q 24 -** La valeur moyenne d'un cosinus valant 0, on en déduit que $\overline{\delta\text{T}_s} = \dfrac{\text{P}_0}{4\pi\kappa a}$

Application numérique : $\overline{\delta\text{T}_s} = 5{,}0\,\text{K}$