DM 05

I. Echange d'énergie dans un écoulement

1 - Principe

Pour évacuer l'énergie thermique dans un écoulement, un tube en acier est placé dans d'une conduite cylindrique d'axe Ox où circule un fluide à la température T_e. La figure 1 présente un tronçon d'échangeur. On réalise ainsi un module d'échangeur de longueur L_0.

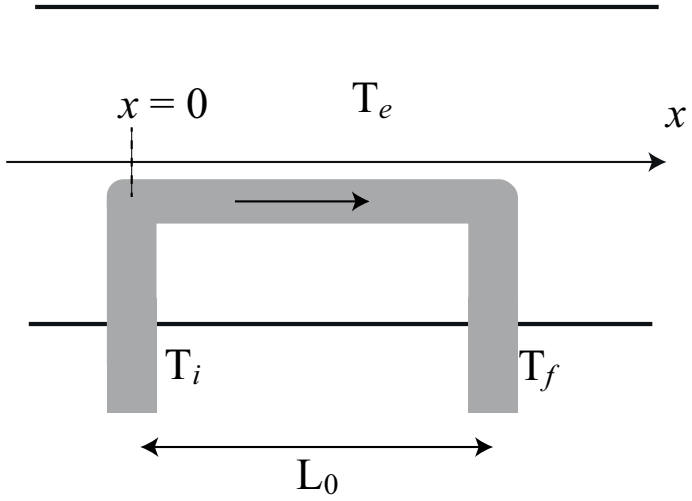


FIGURE 1 – module

2 - Résistance thermique d'une canalisation cylindrique

On s'intéresse aux échanges thermiques dans un tube en acier de longueur L, de rayon intérieur $R_1 = 3{,}0$ cm et de rayon extérieur $R_2 = 3{,}1$ cm, de conductivité thermique $\lambda_{acier} = 40$ W.m^{-1}.K^{-1}. La température sur la face extérieure est notée $T_e = 360$ K, tandis que celle de l'eau à l'intérieur de la canalisation T_0.

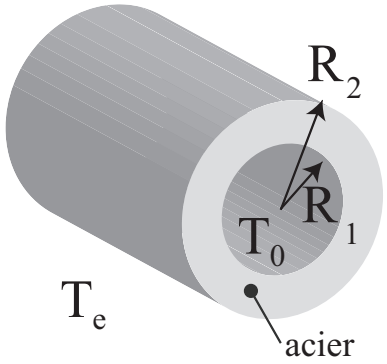


FIGURE 2 – Tube en acier

☐ **Q 1 -** Montrer qu'en régime stationnaire, l'équation vérifiée par la température dans un matériau cylindrique de conductivité λ est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

☐ **Q 2 -** Déterminer et représenter le profil de température $T(r)$ dans le tube d'acier pour r compris entre R_1 et R_2.

☐ **Q 3 -** Que peut-on dire du flux d'énergie en régime stationnaire ? En déduire que l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un conducteur de conductivité λ, de longueur L, compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 est donnée par

$$R_{th} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L\lambda}$$

☐ **Q 4 -** En déduire que le fluide dans la canalisation évacue, par unité de longueur, une puissance thermique linéique de la forme $p_{th} = \alpha(T_0 - T_e)$. Calculer la valeur du coefficient α.

3 - Profil de température dans l'échangeur

Les hypothèses suivantes sont formulées.

- L'écoulement est supposé parfait, permanent, unidimensionnel, de variation d'énergie cinétique négligeable.
- La température T du fluide ne dépend que de x. Le fluide entre à la température T_i et ressort à la température T_f.
- On note D_m le débit massique de l'eau dans le tube en acier de longueur $L = 1{,}0$ m.
- L'eau à la température $T(x)$ évacue, par unité de longueur, une puissance thermique linéique $p_{th} = \alpha(T(x) - T_e)$, avec $\alpha = 7{,}7 \cdot 10^3$ W $\cdot$ m^{-1} $\cdot$ K^{-1}.
- le fluide est assimilé à de l'eau de capacité thermique massique $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ J $\cdot$ k^{-1} $\cdot$ kg^{-1}

☐ **Q 5 -** Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $T(x)$.

☐ **Q 6 -** Montrer que $T(x)$ s'écrit sous la forme

$$T(x) = A + Be^{-x/\ell_c}$$

Exprimer ℓ_c, A et B en fonction des données du problème.

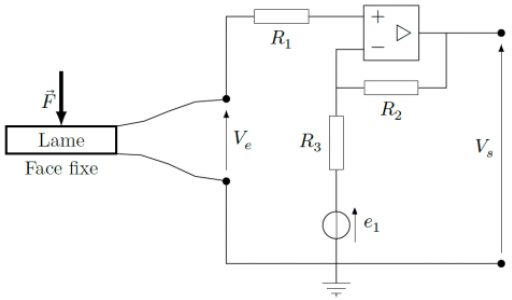
☐ **Q 7 -** On impose $T_e = 360\,K$, $T_i = 280\,K$ et $T_f = 310\,K$, en déduire le débit d'eau dans le tube en acier.

☐ **Q 8 -** Quelle est la signification physique de ℓ_C ? Donner la valeur de ℓ_C et justifier le choix de la longueur de la canalisation.

II. ALI

Mesure d'une force par un piézoélectrique

Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.



On suppose qu'une force $\vec{F}$ régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entrainant l'apparition d'une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu'à la force $\vec{F}$ exercée de sorte que $q = CV_e = KF$ où C, K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force $\vec{F}$.

☐ **Q 9 -** Après avoir rappelé le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal, exprimer la tension V_e en fonction de e_1, V_s et des différentes résistances.

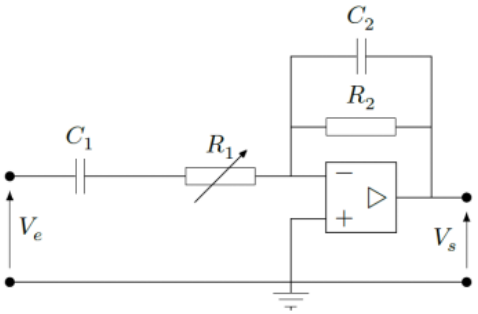
☐ **Q 10 -** On donne : $R_1 = 10\,k\Omega$, $R_2 = 6{,}5\,k\Omega$, $R_3 = 1{,}0\,k\Omega$ et $e_1 = 100\,mV$. On mesure $V_s = 6{,}50\,V$, en déduire V_e.

☐ **Q 11 -** Sachant que $C = 8{,}0 \cdot 10^{-13}\,F$ et que $K = 1{,}0 \cdot 10^{-12}\,C \cdot N^{-1}$, déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur la lame.

Mesure de la fréquence d'une force excitatrice

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f, fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure suivante.

☐ **Q 12 -** Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure ci-dessus et la mettre sous la forme



$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1 + j\,(\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega)}$$

en précisant les expressions de A, ω_1 et ω_2 en fonction de R_1, R_2, C_1 et C_2.

☐ **Q 13 -** Indiquer quelle est la nature de ce filtre.

☐ **Q 14 -** Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω que l'on exprimera en fonction de ω_1 et ω_2.

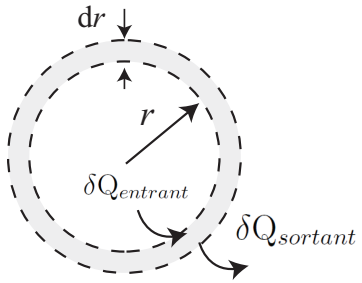
On ajuste à présent la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

☐ **Q 15 -** Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération et comment le relier au montage.

☐ **Q 16 -** Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1{,}0 \cdot 10^2\,k\Omega$, $C_1 = 50\,nF$, $C_2 = 5{,}0\,nF$ et qu'il a fallu régler R_1 à $10\,k\Omega$ de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

III. Dosage

☐ **Q 1 -** Effectuons un bilan d'énergie sur un tube de hauteur h, de rayon r et d'épaisseur dr.



On note $\delta \mathrm{Q}_e = j(r) \times 2\pi r h \mathrm{d}t$ l'énergie entrant dans le système et $\delta \mathrm{Q}_s = j(r+\mathrm{d}r) \times 2\pi(r+\mathrm{d}r)h\mathrm{d}t$ l'énergie sortant du système. Appliquons le premier principe pendant dt, en régime stationnaire on obtient :

$$\mathrm{dH} = 0 = \delta \mathrm{Q}_e - \delta \mathrm{Q}_s = j(r) \times 2\pi r h \mathrm{d}t - j(r+\mathrm{d}r) \times 2\pi r h \mathrm{d}t$$

En divisant par $2\pi h \mathrm{d}t \mathrm{d}r$, il vient

$$\frac{(r+\mathrm{d}r)j(r+\mathrm{d}r) - rj(r)}{\mathrm{d}r} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}rj(r)}{\mathrm{d}r} = 0$$

En utilisant la relation de Fourier, $\vec{j} = -\lambda \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}$ soit $j(r) = -\lambda \dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r}$, on en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r}\right) = 0$

☐ **Q 2 -** Intégrons l'équation précédente, il vient :

$$r\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r} = \mathrm{A} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{A}}{r} \quad \text{soit} \quad \mathrm{T}(r) = \mathrm{A}\ln r + \mathrm{B}$$

Appliquons les conditions aux limites :
$\mathrm{T}(\mathrm{R}_1) = \mathrm{T}_1 = \mathrm{A}\ln \mathrm{R}_1 + \mathrm{B}$ et $\mathrm{T}(\mathrm{R}_2) = \mathrm{T}_2 = \mathrm{A}\ln \mathrm{R}_2 + \mathrm{B}$.

Ainsi, $$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{T}_1 \ln \mathrm{R}_2 - \mathrm{T}_2 \ln \mathrm{R}_1}{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)}$$

☐ **Q 3 -** Le flux d'énergie est donc donné par

$$\Phi = 2\pi \mathrm{R}_1 \mathrm{L} j(\mathrm{R}_1) = -2\pi \mathrm{R}_1 \mathrm{L}\lambda \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r} = -2\pi \mathrm{R}_1 \mathrm{L}\lambda \frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)} \frac{1}{\mathrm{R}_1}$$

On en déduit que : $\mathrm{R}_{th} = \dfrac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\Phi} = \dfrac{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)}{2\pi \mathrm{L}\lambda}$

☐ **Q 4 -** Par définition :

$$\Phi = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_e}{\mathrm{R}_{th}}$$

On en déduit que la puissance linéique est donnée par :

$$p_{th} = \frac{\Phi}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_e}{\mathrm{L}\dfrac{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)}{2\pi \mathrm{L}\lambda}} = \frac{2\pi\lambda}{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)}(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_e)$$

A.N. : $$\boxed{\alpha = \frac{2\pi\lambda}{\ln(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)} = 7{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}}$$

☐ **Q 5 -** Appliquons le premier principe à une tranche dx en écoulement :

$$h(x+\mathrm{d}x) - h(x) = -\delta q_e = -p_{th}\mathrm{d}x/\mathrm{D}_m$$

On en déduit que :

$$c(\mathrm{T}(x+\mathrm{d}x) - \mathrm{T}(x)) = -\alpha(\mathrm{T}(x) - \mathrm{T}_e)\mathrm{d}x/\mathrm{D}_m$$

En divisant par dx, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}x} + \frac{\alpha}{\mathrm{D}_m c}\mathrm{T}(x) = \frac{\alpha}{\mathrm{D}_m c}\mathrm{T}_e$$

☐ **Q 6 -** La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}_e + (\mathrm{T}_i - \mathrm{T}_e)e^{-\alpha x/\mathrm{D}_m c}$$

☐ **Q 7 -** En isolant le débit pour $\mathrm{T}(x = \mathrm{L}) = \mathrm{T}_f$, on obtient :

$$\mathrm{D}_m = \frac{\alpha \mathrm{L}}{c}\frac{1}{\ln\frac{\mathrm{T}_e - \mathrm{T}_i}{\mathrm{T}_e - \mathrm{T}_f}} = 3{,}9\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

☐ **Q 8 -** $\ell_{\mathrm{C}} = \mathrm{D}_m c/\alpha$ correspond à la distance caractéristique de fluctuation de la température. Avec les données de l'énoncé : $\ell_{\mathrm{C}} \sim 1\,\mathrm{m}$, pour maximiser les transferts d'énergie, il faut que la longueur du tube soit, ni trop petite pour avoir une surface suffisante ni trop grande pour que la différence de température permette des échanges thermiques conséquents.

☐ **Q 9 -** Dans le modèle de l'ALI idéal, $\mathrm{V}^+ = \mathrm{V}^-$ et les courants d'entrée sont nuls $i^+ = i^- = 0$. Par continuité du courant à la borne inverseuse :

$$i_{\mathrm{R}_3} = i_{\mathrm{R}_2} \quad \text{soit} \quad \frac{e_1 - v^-}{\mathrm{R}_3} = \frac{\mathrm{V}^- - \mathrm{V}_s}{\mathrm{R}_2}$$

En régime linéaire (rétroaction sur la borne inverseuse), $V^- = V^+ = V_e$, la résistance R_1 n'a pas d'interêt ici. On obtient alors :

$$\frac{e_1 - V_e}{R_3} = \frac{V_e - V_s}{R_2} \quad \text{soit} \quad V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$$

☐ **Q 10 -** On trouve : $V_e = 0{,}95\,\text{V}$.

☐ **Q 11 -** La force vérifie $F = CV_e/K = 0{,}76\,\text{N}$.

☐ **Q 12 -** Le fonctionnement est supposé linéaire, on obtient donc :

$$i_{R_1} = i_{R_2} + i_{C_2} \quad \text{soit} \quad \frac{V_e - V^-}{Z_{C_1} + R_1} = \frac{V^- - V_s}{R_2} + \frac{V^- - V_s}{Z_{C_2}}$$

l'ALI étant supposé idéal, $V^+ = V^- = 0$, on en déduit que :

$$\frac{V_e}{1/jC_1\omega + R_1} = \frac{-V_s}{R_2} + \frac{-V_s}{1/jC_2\omega} \quad \text{soit} \quad \frac{V_e jC_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega} = -V_s \frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}$$

On obtient finalement :

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{jR_2C_1\omega}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)} = -\frac{jR_2C_1\omega}{1 + j(R_1C_1 + R_2C_2)\omega - R_1C_1R_2C_2\omega^2}$$

Pour faire apparaître ω_1, divisons numérateur et dénominateur par $j(R_1C_1 + R_2C_2)\omega$:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{\frac{R_2C_1}{R_1C_1 + R_2C_2}}{\frac{-j}{(R_1C_1 + R_2C_2)\omega} + 1 + \frac{R_1C_1R_2C_2 j\omega}{R_1C_1 + R_2C_2}}$$

Par identification, on obtient alors :

$$A = \frac{R_2C_1}{R_1C_1 + R_2C_2} = \frac{1}{R_1/R_2 + C_2/C_1} \quad \omega_1 = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1C_1R_2C_2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

☐ **Q 13 -** Il s'agit d'un filtre passe bande, $\underline{H}(\pm\infty) = 0$.

☐ **Q 14 -** Le gain est maximum lorsque $\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega$ est minimal, soit

$$\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

☐ **Q 15 -** L'allure des sinusoïdes à l'oscilloscope (V_e sur voie 1, V_s sur voie 2) présentera un max pour l'un et un min pour l'autre.

☐ **Q 16 -** En opposition de phase, $\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$, on en déduit que :

$$f = 320\,\text{Hz}$$

☐ **Q 27 -** La réaction 1 est la combinaison de :

$$H_2P_2O_7^{2-} + H_2O = HP_2O_7^{3-} + H_3O^+ \quad Ka1$$

$$CO_{2(aq)} + H_2O = HCO_3^- + H_3O^+ \quad Ka_3$$

$$CO_{2(g)} = CO_{2(aq)} \quad K_s$$

On a $(1) = a1 - a_3 - s$, la constante de la réaction 1 vaut donc :

$$K_1 = \frac{K_{a1}}{K_{a3}K_s} = 14.2$$

☐ **Q 28 -** D'après l'équation bilan, il faut autant de chaque espèce, on en déduit que :

$$\frac{m_d}{M_d} = \frac{m_b}{M_b} \quad \text{et} \quad m_d + m_b = m_t = 11\,\text{g}$$

En utilisant la masse molaire : $M_d = 120\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $M_b = 84\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, on obtient :

$$m_d = \frac{m_t}{1 + M_b/M_d} = 8\text{g} \quad \text{et} \quad m_d = \frac{m_t}{1 + M_d/M_b} = 3\text{g}$$

☐ **Q 29 -** La réaction étant totale,

$$n_{CO_2} = \frac{m_b}{M_b} = 3{,}6 \cdot 10^{-2}\,\text{mol}$$

Pour un gaz parfait, cela correspond à un volume de

$$V = \frac{nRT}{P} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = 1{,}3\text{L}$$

☐ **Q 30 -** Pour distinguer les couples, on regarde les valeurs des croisements (pKa). Par identification des espèces acides et basiques :

$$1 : H_2P_2O_7^{2-},\ 2 : HP_2O_7^{3-},\ 1 : P_2O_7^{4-}$$

$$4 : H_3O^+,\ 5 : HO^-$$

☐ **Q 31 -** $C_p = 10^{-0.5}$ mol.L^{-1}.

☐ **Q 32 -** On retrouve les pKa.

☐ **Q 33 -** La concentration est donc voisine de C_p. Tout le phosphate est sous forme $HP_2O_7^{3-}$. Le max est obtenu por pH = 8