

I. Le microscope

1 - Pouvoir de résolution de l'oeil humain

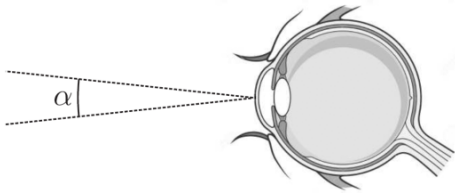


FIGURE 1 – Géométrie de l'oeil.

Cette partie s'appuie sur les documents 1, 2 et 3. L'oeil peut être modélisé par une lentille mince convergente de distance focale variable f_0 placée dans l'air, d'indice $n = 1$ et de diamètre D , identique à celui de la pupille d'entrée de l'oeil. On désigne par λ la longueur d'onde moyenne du rayonnement visible égale à 500 nm. Dans cette partie on considérera deux objets, ponctuels, incohérents, placés dans l'air à une distance grande devant le punctum remotum, dont les images se forment au centre de la fovéa d'un oeil emmétrope. Comme indiqué sur la figure 1, ils sont vus sous un angle α .

□ **Q 1** - En considérant le nombre fini N de cônes présents par unité de surface au centre de la fovéa et sans tenir compte de la diffraction, estimer la valeur minimale de α notée α_1 , permettant de discerner les deux objets situés à l'infini. Le résultat sera donné en fonction de N , et f_0 puis sera estimé numériquement en minute d'arc.

□ **Q 2** - En raison de la diffraction par la pupille, l'image d'un objet ponctuel est une tâche sur la rétine. En tenant compte de la diffraction, estimer de nouveau la valeur minimale de α notée α_2 séparant deux objets ponctuels incohérents vus distinctement par un oeil emmétrope au centre de sa fovéa. Exprimer α_2 en fonction de λ et D et comparer sa valeur à celle de α_1 .

□ **Q 3** - En utilisant la valeur minimale $\alpha_2 = 1'$ séparant deux objets ponctuels incohérents à distance finie, calculer numériquement la dimension a_1 du plus petit motif observable à l'oeil nu. Donner un exemple d'objet possédant une dimension de longueur comparable à a_1 .

2 - Microscope de Van Leeuwenhoek

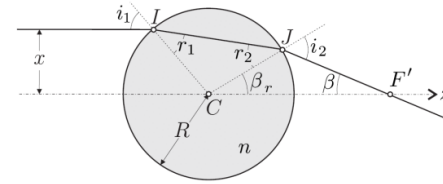


FIGURE 2 – Lentille boule.

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek, était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon $R = 0,60$ mm de centre C . L'indice optique de la silice sera noté n , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés F et F' .

□ **Q 4** - Expliquer, à l'aide d'un schéma optique précis, l'intérêt d'introduire une telle lentille entre l'échantillon et l'observateur.

Sur la figure 2 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique (Cz) se propageant dans une lentille boule d'indice optique n placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par C , perpendiculaire à l'axe (Cz). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss. Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés i_1 , au point I en entrée de la lentille et i_2 à l'extérieur de la lentille au point J , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés r_1 et r_2 . L'angle $\widehat{F'CJ}$ est noté β_r et l'angle de déviation $\widehat{CFJ}$ sera noté β .

□ **Q 5** - Déterminer la relation entre i_1 et i_2 . Exprimer i_1 en fonction de x et R . Exprimer β_r en fonction de i_1 et n , puis en fonction de x , R et n . Exprimer β en fonction de i_1 et β_r puis de x , R et n . En déduire la distance focale f'_L définie comme la distance CF' sur la figure 2 en fonction n et R . Estimer enfin numériquement f_L en prenant $n = 1,5$.

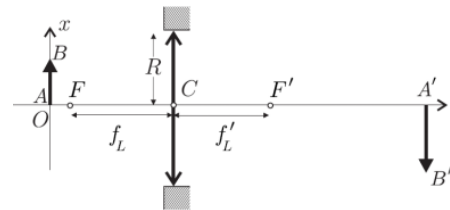


FIGURE 3 – Lentille mince équivalente.

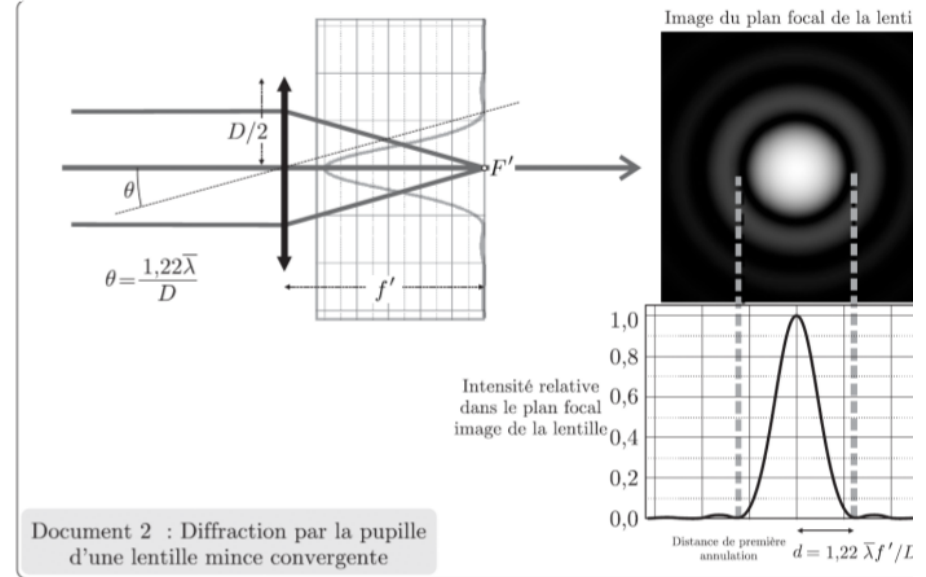
Dans toute la suite, (Ox) désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan (Ox, Oz) et on prendra $f'_L = 1$ mm. On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale f'_L et le même rayon R . Celle-ci est représentée sur la figure 3. On rappelle que la relation de conjugaison pour une lentille mince de centre C dans l'approximation de Gauss s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{\overline{CF'}}$$

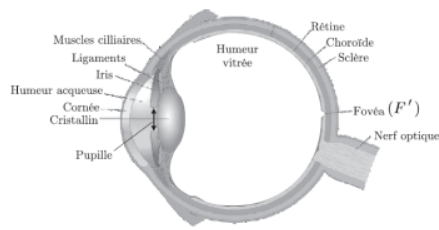
Le grandissement transversal γ d'un système optique est défini comme le rapport de la taille de l'image et de la taille de l'objet $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB}$, tous deux orientés

transversalement à l'axe optique. Une des normes actuelles est d'imposer une distance $\ell = 195 \text{ mm}$ sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

□ **Q 6** - Déterminer l'expression de $\overline{CA}$ en fonction de ℓ et f'_L pour que le grandissement transversal γ du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue dans l'approximation de Gauss. On a ici $\ell \gg 4f'_L$, en déduire une expression approchée de γ .



Document 1 : Modélisation de l'œil humain emmétrope

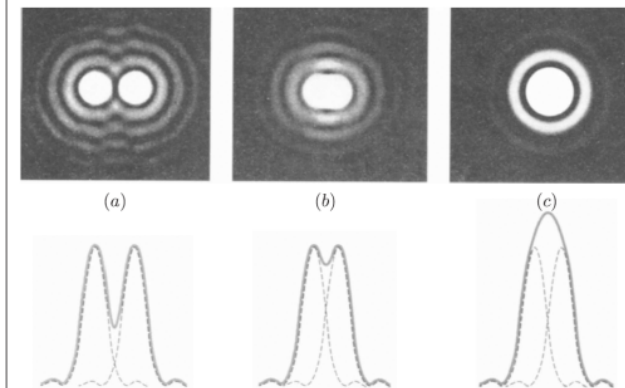
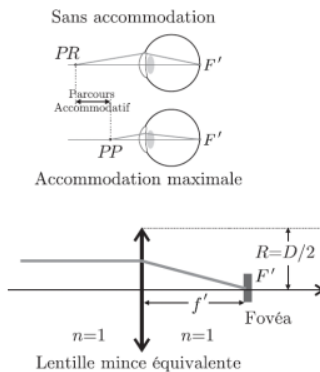


Diamètre de la pupille : $D = 3 \text{ mm}$
 Indice de l'humeur vitrée : 1,33
 Indice du cristallin : 1,45

La fovéa contient en son centre environ $N = 160\,000$ cônes/ mm^2 , chacun de ces cônes est une cellule photosensible.

Le punctum proximum (PP) est le point le plus proche que l'on peut voir distinctement. Il est situé à 25 cm de la pupille et tel que dans cette situation $f' = f'_1 = 16 \text{ mm}$.

Le punctum remotum (PR) est la distance à partir de laquelle l'œil n'accommode plus, il est tel que dans cette situation $f' = f'_2 = 17 \text{ mm}$.



Seuls les cas (a) et (b) permettent de discerner deux maxima. En (b), il s'agit de l'angle minimal permettant de discerner deux taches.

Document 3 : Pouvoir de séparation entre deux taches issues de sources incohérentes

II. Optique physique

1 - Présentation

Les plasmons de surface sont des oscillations d'électrons à la surface d'un métal. L'onde générée est très étudiée depuis quelques décennies car les applications sont prometteuses tant dans la détection de molécules unique que dans la transformation d'un signal optique en un signal électrique. Nous considérerons ici qu'un plasmon se comporte comme une source lumineuse étendue sur l'axe Ox .

Pour étudier la cohérence spatiale des plasmons se propageant à la surface des films métalliques, une image spatiale de la surface des plasmons est formée dans un plan intermédiaire où se trouvent deux fentes d'Young sélectionnant l'émission de deux points spatialement éloignés.

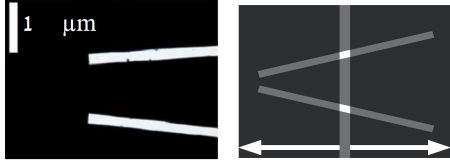


FIGURE 5 – Réalisation de trous d'Young d'écartement variable.

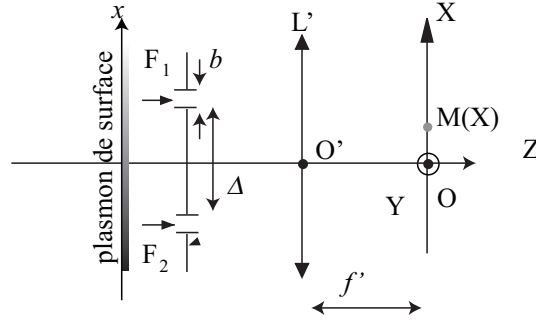


FIGURE 4 – Schéma de principe du montage expérimental. L'image spatiale de la surface des plasmons est formée dans un plan intermédiaire où se trouvent deux fentes d'Young sélectionnant l'émission de deux points spatialement éloignés.

Les fentes utilisées sont en forme de V, une troisième placée verticalement permet de faire varier la distance entre les deux points en laissant la fente verticale fixe et en se déplaçant horizontalement par rapport aux fentes. On note Δ l'écartement variable entre les fentes (cf 5) et b leur largeur. L'image obtenue est visualisée grâce à un objectif de microscope assimilée à une lentille convergente de distance focale f' .

□ Q 7 - À partir des figures 4 et 5, justifier que les fentes peuvent se comporter comme des sources secondaires.

2 - Cas d'une source ponctuelle

On considère deux sources lumineuses émettant depuis F_1 et F_2 vers le point M. On note ϕ_0 le retard de phase de la vibration issue de F_2 par rapport à F_1 . Soit $s_1(X, t) = A_1 \cos(\omega t - \phi_1)$ la vibration lumineuse de l'onde passant par la fente F_1 et arrivant en M et $s_2(X, t) = A_2 \cos(\omega t - \phi_2 - \phi_0)$ celle de l'onde passant par F_2 .

□ Q 8 - À partir des vibrations lumineuses, définir l'intensité lumineuse résultante

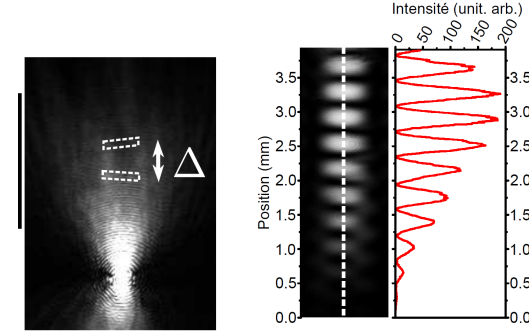


FIGURE 6 – Superposition des fentes utilisées sur un plasmon et schéma de principe du système faisant varier la distance entre les fentes. Figure de droite : $f' = 1,7$ mm et $\Delta = 2,7$ μm

au point M en fonction de ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 , I_1 et I_2 , les intensités lumineuses obtenues si une seule fente est présente.

□ Q 9 - Définir et expliquer soigneusement la différence de marche géométrique entre 2 rayons issus de F_1 et F_2 qui interfèrent en M.

□ Q 10 - Rappeler l'expression de $\phi_2 - \phi_1$ en fonction de δ et λ .

□ Q 11 - Quel est l'influence de ϕ_0 sur la figure observée.

□ Q 12 - Représenter l'intensité lumineuse sur l'axe OX.

□ Q 13 - En utilisant les résultats expérimentaux de la figure 6, exprimer puis calculer la longueur d'onde de la lumière émise par le plasmon.

Des mesures de l'interfrange sont réalisées pour différentes longueurs d'ondes et différents écartement des fentes (cf. fig.7)

□ Q 14 - Justifier que la représentation choisie conduit à un comportement linéaire.

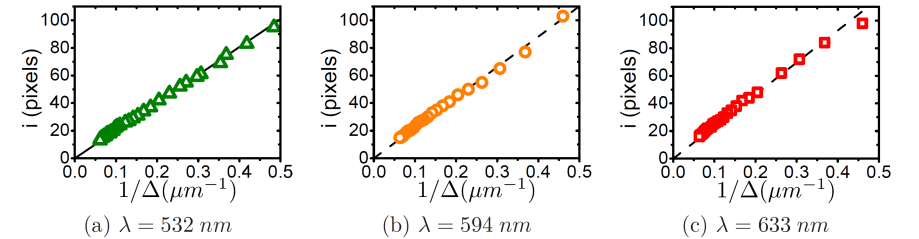


FIGURE 7 – Evolution de l'interfrange en fonction de $1/\Delta$ pour différentes longueurs d'onde.

□ **Q 15** - Au vue des résultats expérimentaux obtenus sur la figure 6 justifier qu'un plasmon se comporte comme une source étendue cohérente. Qu'observerait on sur l'axe Ox si les vibrations étaient incohérentes ?

3 - Source étendue cohérente

Le montage expérimental d'étude des plasmons consiste à plaquer les fentes sur la source plasmonique pour en extraire les vibrations lumineuses en F_1 et F_2 (cf fig.4). Le but du montage est de démontrer qu'un plasmon se comporte comme une source étendue cohérente contrairement à la plupart des autres sources étendues.

L'amplitude des ondes lumineuses traversant chacune des fentes n'est pas identique car le plasmon s'atténue lors de sa propagation selon l'axe Ox. L'amplitude de la vibration de la source plasmonique le long de l'axe Ox peut s'écrire : $A(x) = Ae^{-x/2L_p}$ où L_p est la longueur caractéristique de propagation du plasmon.

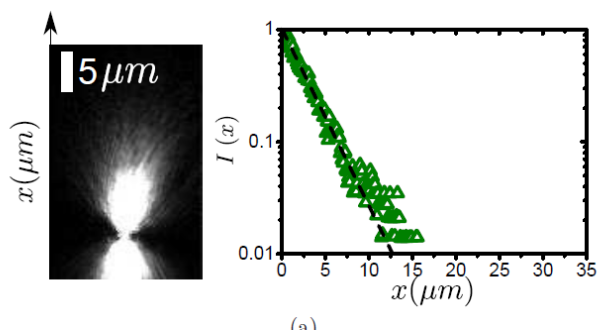


FIGURE 8 – Evolution de l'intensité lumineuse lors de la propagation d'un plasmon selon Ox pour $\lambda = 532$ nm.

□ **Q 16** - Exprimer l'intensité lumineuse à partir de la vibration et déterminer la valeur de L_p grâce aux valeurs relevées figure 8.

□ **Q 17** - Définir les intensités lumineuses $I(x - \Delta/2)$ et $I(x + \Delta/2)$ des points sources situés devant les fentes F_1 et F_2 . On notera $I_0 = A^2/2$.

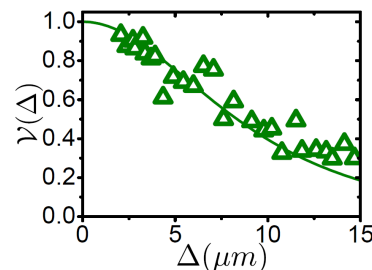


FIGURE 9 – Evolution du contraste pour $\lambda = 532$ nm

□ **Q 18** - Lorsque les vibrations lumineuses sont extraites par les fentes F_1 et F_2 , montrer que le facteur de visibilité (ou contraste) de la figure est donnée par : $V(\Delta) = \frac{2e^{-\Delta/2L_p}}{1+e^{-\Delta/L_p}}$

Il est possible de valider l'hypothèse de cohérence de la source étendue grâce l'étude de l'évolution du contraste en fonction de l'écartement entre les fentes (cf. fig 9).

□ **Q 19** - Exprimer la longueur de propagation en fonction de Δ et V . Pour résoudre l'équation proposée, on pourra poser : $X = e^{-\Delta/2L_p}$.

□ **Q 20** - En utilisant la valeur du contraste minimale obtenue à la figure 9, estimer la longueur de propagation d'un plasmon pour $\lambda = 532$ nm. Commenter.

III. Electronique

• Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

• La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.

• Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données ci-contre.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.

- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure 10. Ce problème s'intéresse au trai-

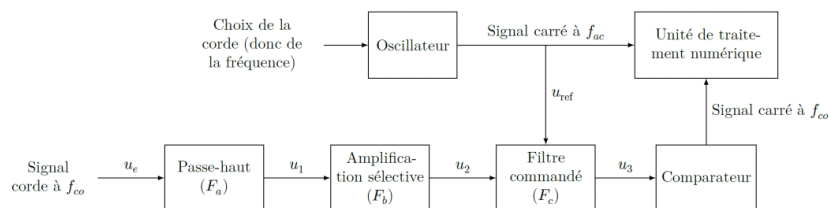


FIGURE 10 – Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

tement du signal venant de la corde.

1 - Le signal

La figure 11 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

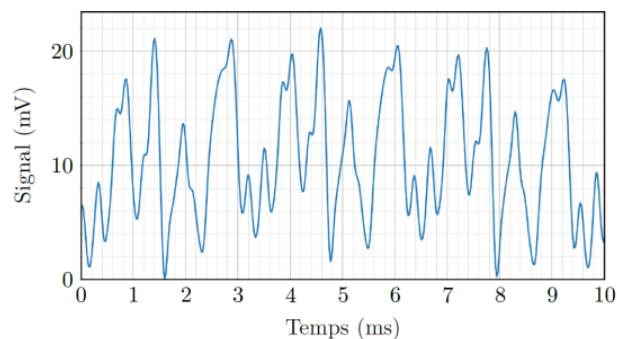


FIGURE 11 – Signal de la guitare

- **Q 21** - Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

- **Q 22** - Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
- **Q 23** - De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- **Q 24** - L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

2 - Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 12 (filtre (F_a)).

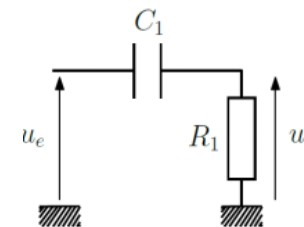


FIGURE 12 – Filtre (F_a)

- **Q 25** - En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
- **Q 26** - De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
- **Q 27** - Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
- **Q 28** - On a choisi $R_1 = 100\text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 11, quel est le rôle de ce premier filtre ?

3 - Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé plus loin.

a) Diagramme de Bode

La figure 13 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

- **Q 29** - Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
- **Q 30** - Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir

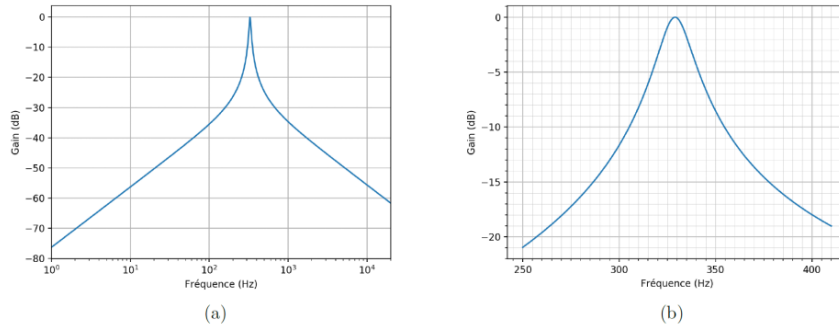


FIGURE 13 – Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

définie.

□ **Q 31** - Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

b) Analyse spectrale

La figure 14 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 11.

□ **Q 32** - Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 11.

□ **Q 33** - En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 15 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

□ **Q 34** - Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

□ **Q 35** - Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

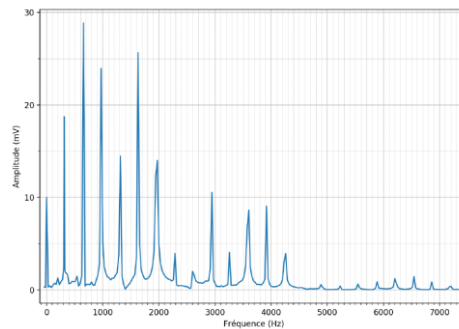


FIGURE 14 – Spectre du signal d'entrée

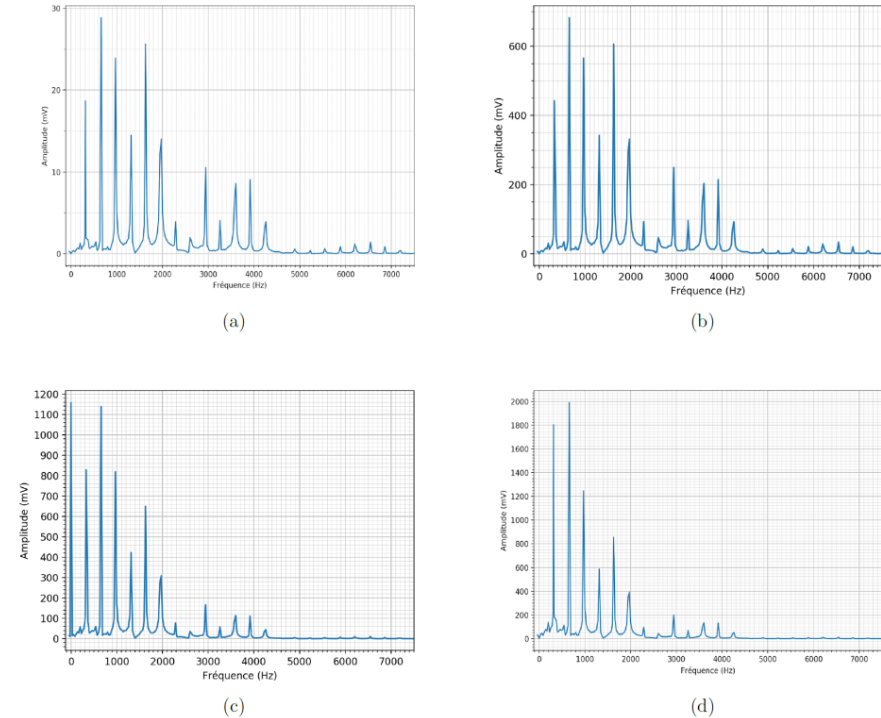


FIGURE 15 – Spectres

a) Capacité commutée

Soit un condensateur de capacité C aux bornes duquel on applique une tension u_C .

□ **Q 36** - Rappeler l'expression de la charge q transférée au condensateur en fonction de C et u_C . On précisera, à l'aide d'un schéma, les conventions utilisées.

On monte maintenant le condensateur de capacité C_k entre deux interrupteurs commandés notés K_A et K_B , comme l'indique la figure 16.

On fait les hypothèses suivantes.

- Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).

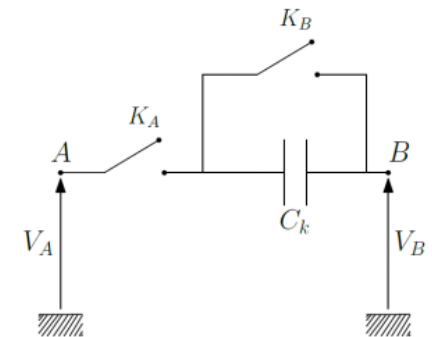


FIGURE 16 – Capacité commutée

4 - Retour sur le filtre sélectif commandé

Regardons plus en détails la manière de fabriquer le filtre (F_c) dont la fréquence centrale est commandée par un signal carré externe. On utilise pour cela un filtre à *capacité commutée*.

- Ils sont toujours dans des états *complémentaires* : si K_A est ouvert, alors K_B est fermé et inversement.
- Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal u_{ref} carré périodique de fréquence f_k (période T_k)) de telle sorte que :
 - sur l'intervalle $[0, T_k/2]$: K_A est fermé et K_B ouvert ;
 - sur l'intervalle $[T_k/2, T_k]$: K_A est ouvert et K_B fermé.
- Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.
- La période T_k est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

□ **Q 37** - Donner les expressions de q_1 et q_2 , les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point B respectivement sur l'intervalle $[0, T_k/2]$ et $[T_k/2, T_k]$. On précisera les conventions utilisées.

On en déduit $\delta q = q_2 - q_1$ la charge transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

□ **Q 38** - À quoi est alors égale la charge totale Q transférée de l'entrée vers la sortie en un temps $t \gg T_k$?

□ **Q 39** - En déduire l'expression de l'intensité moyenne I_m associée à ce transfert en fonction de V_A , V_B , C_k et f_k .

□ **Q 40** - Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle AB se comporte comme une résistance R_k ? Donner l'expression de cette résistance en fonction de f_k et C_k .

La capacité commutée se comporte donc comme une résistance R_k dont la valeur est commandée par un signal extérieur et plus exactement par la fréquence f_k de ce signal.

b) Filtre à capacité commutée

□ **Q 41** - Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence u_{ref} et, en particulier, un filtre du type recherché pour (F_c).

I- Pouvoir de résolution de l'œil humain

□ **Q 1** - Les objets sont à l'infini (pas d'accommodation) donc l'image des deux objets se forme dans le plan focal image, et la distance séparant les deux images est $\Delta X = 2f' \tan(\alpha/2) \approx f'\alpha$.

Il y a N cônes dans un mètre carré, donc la surface d'un cône est $1/Nm^2$, donc la dimension d'un côté d'un cône, en les supposant carré, est $d \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Pour que les objets soient distinguables, il faut que ΔX soit supérieur à d , d'où $\alpha > \alpha_1 = \frac{1}{f'\sqrt{N}}$.

A.N. : $\alpha_1 \approx 0,5$ minute d'arc.

□ **Q 2** - En utilisant le critère de Rayleigh : pour que les deux objets soient distinguables, il faut que la distance $\Delta X \approx f'\alpha$ séparant les centres des deux taches de diffraction soit supérieure à la demi-largeur $\Delta X' = f'\theta$ de l'une de ces taches.

D'où : $\alpha > \theta = \alpha_2 = \frac{1,22\lambda}{D}$.

A.N. : $\alpha_2 \approx 0,7$ minute d'arc $> \alpha_1$. C'est la diffraction qui semble être limitante dans la résolution de l'œil.

□ **Q 3** - On se place au punctum proximum PP : $a_1 \approx a_2$ PP, soit $a_1 \approx 73 \mu m$. C'est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un cheveu.

II- Microscope de Van Leeuwenhock

□ **Q 4** - Là, je ne vois pas trop ce que l'énoncé attend....En refaisant le schéma du texte, on voit que les rayons vont avoir tendance après traverser de la lentille à se rapprocher de l'axe, ce qui permet d'avoir un grossissement angulaire supérieur à 1 et donc de jouer le rôle de microscope.... □ **Q 5** - En considérant la perpendiculaire à la droite IJ passant par C, on obtient deux triangles identiques, donc $r_2 = r_1$ et par suite $i_1 = i_2$.

En notant H' le projeté de I sur l'axe z , et en se plaçant dans le triangle H'IC, il vient : $\sin i_1 = \frac{x}{R}$, d'où en linéarisant : $i_1 = \frac{x}{R}$.

En travaillant sur les angles, nous obtenons : $i_1 - r_1 + \beta_r = r_2$, d'où $\beta_r = 2r_1 - i_1$, soit $\beta_r = i_1 \left(\frac{2}{n} - 1 \right)$ ou encore $\beta_r = \left(\frac{2}{n} - 1 \right) \frac{x}{R}$.

De la même façon : $\beta = i_2 - r_2 + i_1 - r_1 = i_1 - \beta_r = 2(i_1 - r_1) = 2 \frac{n-1}{n} \frac{x}{R}$.

Sachant que les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par C, nous obtenons immédiatement : $\frac{x}{CF'} = \tan \beta \approx \beta$, d'où $CF' = f'_L = \frac{nR}{2(n-1)}$.

A.N. : $f'_L = 0,9 \text{ mm}$.

□ **Q 6** - $\overline{AC} + \overline{CA'} = \ell$, d'où $\overline{CA'} = \overline{CA} + \ell$. En injectant ceci dans la formule de conjugaison, il vient : $\frac{1}{\overline{CA} + \ell} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f'}$, soit après calcul $\overline{CA}^2 + \overline{CA}\ell + \ell f'_L = 0$.

Le fait que le grandissement soit en valeur absolue supérieure implique $\overline{CA'} > \overline{AC}$, d'où $\overline{AC} < \ell/2$. La résolution de l'équation précédente donne par conséquent $\overline{CA} =$

$$-\frac{\ell}{2} + \frac{\sqrt{\ell^2 - 4\ell f'_L}}{2} \text{ d'où } \overline{CA'} = \frac{\ell}{2} + \frac{\sqrt{\ell^2 - 4\ell f'_L}}{2}.$$

Si $\ell \gg 4f'_L$, on peut faire des développements limités des racines ci-dessus :

$$\overline{CA} \approx -f'_L \text{ et } \overline{CA'} \approx \ell, \text{ et on aboutit à } \gamma \approx -\frac{\ell}{f'_L}.$$

5 - Présentation

□ **Q 7** - D'après la figure 4, les fentes sont de petites tailles ($b \sim 20 \text{ nm}$) par rapport à la longueur d'onde et pourront être considérées comme des sources grâce à la diffraction.

6 - Source ponctuelle

□ **Q 8** - L'intensité lumineuse est donnée par :

$$I(M) = (s_1(M,t) + s_2(M,t))^2 >$$

Après calcul, on obtient :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1 + \phi_0)$$

□ **Q 9** - Par définition :

$$\delta = (F_2 M) - (F_1 M)$$

Effectuons un tracé des rayons qui interfèrent. D'après le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, on obtient :

$$(HM) = (F_1 M)$$

On en déduit que

$$\delta = (F_2 H)$$

Les relations trigonométriques dans les triangles conduisent à :

$$\delta = \frac{\Delta X}{f'}$$

□ **Q 10** - Par définition :

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

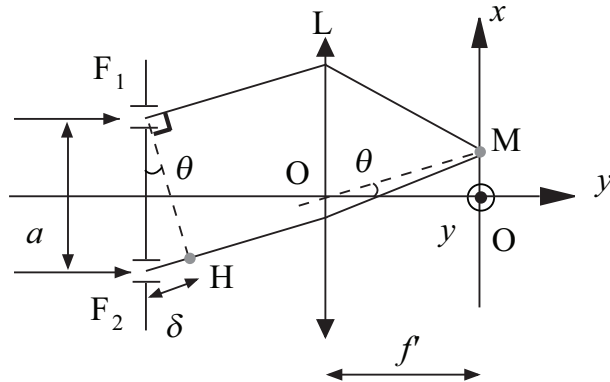


FIGURE 17 – Utilisation du théorème de Malus avec une lentille convergente.

- **Q 11** - ϕ_0 va décaler la figure d'interférences. Cette dernière est centrée si $\phi_0 = 0$.
 □ **Q 12** - On attend la figure suivante :

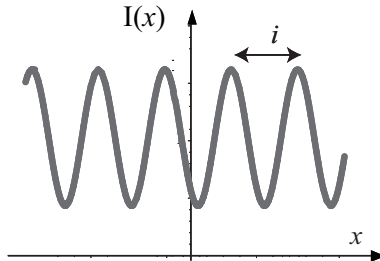


FIGURE 18 – Intensité lumineuse pour deux sources déphasées.

- **Q 13** - L'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\Delta X}{\lambda f'} + \phi_0\right)$$

Par identification de la période spatiale, on obtient l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda f'}{\Delta}$$

Par mesure, en utilisant plusieurs interfranges : obtient :

$$i \approx 0,37 \text{ mm}$$

On en déduit que :

$$\lambda = \frac{\Delta i}{f'} = \frac{2,7 \cdot 10^{-6} \times 0,37 \cdot 10^{-3}}{1,0 \cdot 10^{-3}} \approx 590 \text{ nm}$$

- **Q 14** - L'expression précédente montre une dépendance en $1/\Delta$ quelque soit la longueur d'onde. On en déduit que la représentation $i = f(1/\Delta)$ est linéaire.
 □ **Q 15** - Si les deux vibrations sont incohérentes, alors il n'y aurait pas de fluctuations d'intensité. On observerait une intensité lumineuse uniforme sur l'écran.

7 - Source étendue cohérente

- **Q 16** - Par définition, $I(x) = \langle s^2(M, t) \rangle = \frac{A^2}{2} e^{-x/L_p}$. La représentation de l'intensité lumineuse est en échelle logarithmique :

$$\log(I(x)) = \log\left(\frac{A^2}{2}\right) - \frac{x}{L_p \ln 10}$$

En utilisant les points de coordonnées : $x = 0, I(0) = 1$ et $x = 12 \text{ } \mu\text{m}, I(12) = 0,01$, on obtient :

$$0 = \log\left(\frac{A^2}{2}\right) - 0 \quad \text{et} \quad -2 = -\frac{12}{L_p \ln 10}$$

soit :

$$L_p = 2,6 \text{ } \mu\text{m}$$

- **Q 17** - Déterminons l'intensité de chaque source séparément. On obtient :

$$I_1 = I_0 e^{-(x-\Delta/2)/L_p} \quad \text{et} \quad I_2 = I_0 e^{-(x+\Delta/2)/L_p}$$

- **Q 18** - En remplaçant ces expressions dans la formule de Fresnel, il vient :

$$I(x) = I_0 e^{-(x-\Delta/2)/L_p} + I_0 e^{-(x+\Delta/2)/L_p} + 2I_0 e^{-x/L_p} \cos(\phi_2 - \phi_1 + \phi_0)$$

L'intensité maximale et minimale sont définies par :

$$I_{Max} = I_0 e^{-(x-\Delta/2)/L_p} + I_0 e^{-(x+\Delta/2)/L_p} + 2I_0 e^{-x/L_p}$$

$$I_{min} = I_0 e^{-(x-\Delta/2)/L_p} + I_0 e^{-(x+\Delta/2)/L_p} - 2I_0 e^{-x/L_p}$$

Par définition, le facteur de visibilité est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{Max} - I_{Min}}{I_{Max} + I_{Min}}$$

En remplaçant, il vient :

$$\mathcal{V}(\Delta) = \frac{2I_0 e^{-x/L_p}}{I_0 e^{-(x-\Delta/2)/L_p} + I_0 e^{-(x+\Delta/2)/L_p}}$$

Simplifions par I_0 et e^{-x/L_p} , il vient :

$$\mathcal{V}(\Delta) = \frac{2}{I_0 e^{\Delta/2L_p} + e^{-\Delta/2L_p}}$$

Multiplions numérateur et dénominateur par $e^{-\Delta/2L_p}$, on obtient la formule annoncée :

$$\mathcal{V}(\Delta) = \frac{2e^{-\Delta/2L_p}}{I_0 + e^{-\Delta/L_p}}$$

□ **Q 19** - On résout donc l'équation

$$\mathcal{V}(\Delta) = V_0$$

de façon analytique, on pose $X = e^{-\Delta/2L_p}$, on résout alors :

$$V_0 = \frac{2X}{1 + X^2}$$

d'où

$$V_0 X^2 - 2X + V_0 = 0$$

Les solutions sont :

$$X = e^{-\Delta/2L_p} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4V_0^2}}{2V_0} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - V_0^2}}{V_0}$$

Les deux solutions sont positives mais X est inférieure à 1. On en déduit que :

$$X = \frac{1 - \sqrt{1 - V_0^2}}{V_0}$$

La longueur de propagation du plasmon s'obtient en inversant l'équation :

$$L_p = \frac{\Delta}{2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 - V_0^2}}{V_0}}$$

□ **Q 20** - On remarque que pour $\Delta = 15 \mu\text{m}$, le facteur de visibilité est $V_0 = 0,2$.

A.N. :

$$L_p = 3,2 \mu\text{m}$$

On obtient une valeur de longueur de propagation proche de celle obtenue par mesure directe de l'intensité lumineuse au regard de la dispersion des mesures.

□ **Q 21** - Par lecture graphique $\langle s \rangle \approx 10 \text{ mV}$.

□ **Q 22** - Par lecture graphique $T \approx 3 \text{ ms}$ soit $f \approx 3 \cdot 10^2 \text{ Hz}$.

□ **Q 23** - Il s'agit de la corde de Mi.

□ **Q 24** - Le signal n'est pas sinusoïdal, il y a donc des harmoniques.

□ **Q 25** - On trouve : $\underline{H} = \frac{jR_1 C_1 \omega}{1 + jR_1 C_1 \omega}$

□ **Q 26** - Il s'agit d'un filtre passe haut du premier ordre de pulsation caractéristique $\omega_1 = 1/R_1 C_1$

□ **Q 27** - Allure classique.

□ **Q 28** - $f_1 = \omega_1/2\pi = 16 \text{ Hz}$. Le but est donc de supprimer la valeur moyenne.

□ **Q 29** - En utilisant un pont diviseur : $\underline{H} = \frac{Z+Z'}{Z}$.

□ **Q 30** - Il s'agit d'un amplificateur non inverseur.

□ **Q 31** - $Z_{eq} = R_2/(1 + jR_2 C_2 \omega)$.

□ **Q 32** - En utilisant les résultats précédents :

$$\underline{H} = \frac{R_3 + R_2/(1 + jR_2 C_2 \omega)}{R_3}$$

□ **Q 33** - Après simplification : $G_0 = R_2/R_3$ et $\omega_2 = 1/R_2 C_2$.

□ **Q 34** - $|\underline{H}_2| \rightarrow_{\omega \rightarrow 0} 1 + G_0$ et $|\underline{H}_2| \rightarrow_{\omega \rightarrow \infty} 1$

□ **Q 35** - $f_2 = 500 \text{ Hz}$ et $G_0 = 110$. Ce second filtre amplifie principalement les basses fréquences c'est à dire ici le fondamental.

□ **Q 36** - On reconnaît un filtre passe bande (pente $\pm 20 \text{ dB/dec}$) de fréquence caractéristique $f_0 = 329 \text{ Hz}$.

□ **Q 37** - Par lecture graphique $f_1 = 321 \text{ Hz}$ et $f_2 = 337 \text{ Hz}$.

□ **Q 38** - Par lecture graphique, le gain vaut alors $G_{db} = -6 \text{ dB}$ soit une atténuation de $10^{20/-6} \approx 1/2$.

□ **Q 39** - On reconnaît la fondamentale et ces harmoniques. La fréquence nulle présente bien une amplitude égale à la valeur moyenne.

□ **Q 40** - Le premier filtre coupe la valeur moyenne, il s'agit du spectre a

□ **Q 41** - Le deuxième filtre augmente le poids du fondamental, il s'agit du spectre d

□ **Q 42** - On attend un pic à la fréquence du fondamental. L'allure correspondante est une sinusoïde.

□ **Q 43** - $q = C u_C$ en convention récepteur.

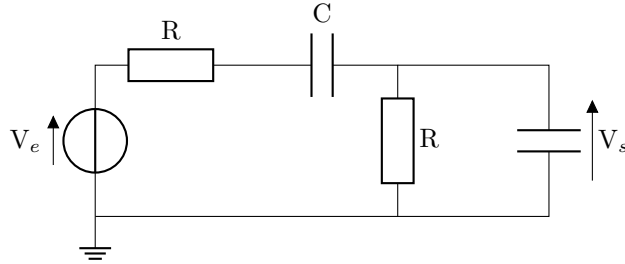
□ **Q 44** - On a rapidement $q_1 = C_k(V_B - V_A)$ et $q_2 = 0$.

□ **Q 45** - Sur une période, on charge δq , on obtient donc : $q_1 = \delta q \frac{t}{T_k} = C_k(V_A - V_B)t/T_k$

□ **Q 46** - Par définition de l'intensité : $I_m = \frac{dq}{dt} = C_k(V_A - V_B)/T_k$.

□ **Q 47** - On reconnaît l'écriture courant tension d'une résistance $R = T_k/C_k = 1/c_k f_k$.

□ **Q 48** - Il faut faire un filtre passe bande avec des résistances.



□ **Q 49** - Effectuons un pont diviseur de tension, il vient :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + R + 1/jC\omega}$$

En mettant au même dénominateur, il vient :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + (R + 1/jC\omega)(1 + jRC\omega)} = \frac{1}{1 + (1 + 1/jRC\omega)(1 + jRC\omega)}$$

Après simplification, il vient :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{3 + 1/jRC\omega + RC\omega} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

□ **Q 50** - À la résonance, $K = 1/3$.

□ **Q 51** - En régime linéaire, $\underline{v} = V^+ = V^-$ Par continuité du courant, $i_{R_1} = i_{R_2}$, on en déduit que :

$$\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - \underline{v}_s}{R_2} \quad \text{soit} \quad \frac{-\underline{v}}{R_1} = \frac{\underline{v} - \underline{v}_s}{R_2}$$

Ainsi, $\underline{v}_s = \underline{v}_s(1 + R_2/R_1)$.

□ **Q 52** - Nous avons montré que

$$1 + j1/3(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)\underline{v} = 3\underline{v}_s \quad \text{soit} \quad \underline{v} + \frac{1}{3\omega_0} \frac{dv}{dt} + \frac{\omega_0}{3} \int v dt = 3v_s$$

En dérivant cette équation, il vient :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{3\omega_0} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\omega_0}{3} v = \frac{1}{3} \frac{dv}{dt}_s \quad \text{soit} \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0 \frac{dv_s}{dt}$$

□ **Q 53** - En régime linéaire, nous avons montré que $\underline{v}_s = \underline{v}_s(1 + R_2/R_1)$, cette équation est également valable en notation réelle, en injectant dans l'équation précédente, il vient :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + (2 - R_2/R_1)\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0$$

Lorsque $R_2 = 2R_1$, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulstation propre ω_0 .