

I. Problème ouvert

Dans le film *passengers* (2016), un vaisseau spatial est constitué de 3 éléments tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante dans un référentiel galiléen. Alors qu'ils sont loin de toute planète, les personnes à bord sont soumises à une gravité artificielle. Une scène mythique du film correspond à la perte de gravité dans la piscine (cf. QR code).



Évaluer la taille du vaisseau et sa vitesse angulaire de rotation pour que la gravité artificielle soit de valeur équivalente à celle existant sur Terre, à 10% près.



Barème :

- Schéma 1 pt
- Bilan des forces 3 pts
- Valeurs numériques argumentées 2 pts
- Qualité de la rédaction 2 pt

II. Mécanique du transport ferroviaire

1 - Démarrage du train de Trevithick

Le premier train qui sera étudié est celui de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse $M_\ell = 1$ t, dont la figure 1 montre une reproduction, a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale $M_c = 10$ t sur une distance $D = 15$ km. Lors de cet essai en ligne droite, conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe Ox , le train parvint à atteindre la vitesse $v_0 = 8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, supposée constante après la phase de démarrage.



FIGURE 1 – locomotive de Trevithick

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposée galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note $\vec{a}_0$ cette accélération. On définit deux systèmes :

- le système Σ_1 , de masse totale M_c , est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
- le système Σ_2 correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale M_ℓ , et qui compte également quatre roues en acier.

On note $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ la force qu'exerce Σ_2 sur Σ_1 ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails. On suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique) f_a . Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées en annexe. On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roues de masse négligeable, la force $\vec{F}_{r1}$ exercée par les rails sur une roue du système Σ_1 est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système Σ_1 . On note également $\vec{F}_{r2}$ la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec $\vec{F}_{r2} = \vec{N}_{r2} + \vec{T}_{r2}$, où $\vec{N}_{r2}$ et $\vec{T}_{r2}$ désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

□ **Q 1** - Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur Σ_1 . Exprimer la force $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ en fonction, entre autres, de l'accélération $\vec{a}_0$.

□ **Q 2** - Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur Σ_2 . On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.

□ **Q 3** - Montrer que $\vec{T}_{r2}$ est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer $\vec{T}_{r2}$ en fonction notamment de l'accélération $\vec{a}_0$ et des diverses masses introduites dans l'énoncé.

□ **Q 4** - Calculer le temps qu'a mis le train de Trevithick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que $||\vec{T}_{r2}|| = 0,1 f_a \vec{N}_{r2}$, de sorte que l'absence de glissement est assurée.

2 - Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

a) Passage en courbe

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes A_0A et BB_0 formant un angle de 120° (figure 2). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points A et B suit une portion du cercle $\mathcal{C}$ tangent aux deux segments de droites en A et B. On note d_{AB} la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

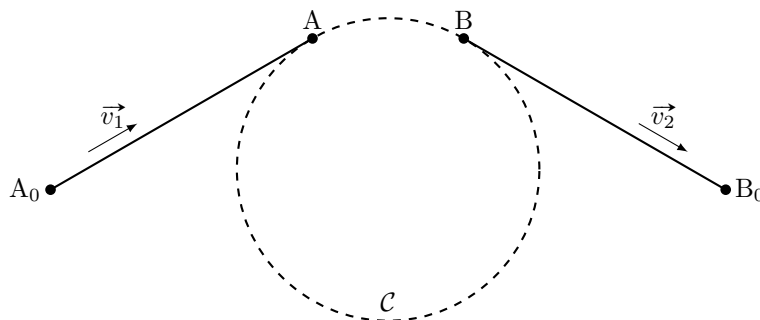


FIGURE 2 – Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes.

□ **Q 5** - Déterminer le rayon R_C du cercle $\mathcal{C}$ en fonction des données.

□ **Q 6** - En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée V_0 (soit $||\vec{v}_1|| = ||\vec{v}_2|| = V_0$), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant $t = 0$ où il se trouve en A_0 et l'instant t_f où il se trouve en B_0 .

□ **Q 7** - Calculer la valeur numérique de l'accélération a_C entre les points A et B dans le cas où $d_{AB} = 2$ km et $V_0 = 300$ km · h⁻¹. Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à $E_r = 1400$ mm.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse m_p reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 3 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à 287 km · h⁻¹.



FIGURE 3 – La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est $R_C = 4$ km. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la verticale lorsque le train est à l'horizontale.

□ **Q 8** - Estimer la valeur du dévers lors de la réalisation de cette expérience. Préciser à l'aide d'un schéma clair lequel des deux rails, intérieur ou extérieur au virage, est surélevé.

b) Usure abrasive des rails sur la ligne de TGV Paris-Lyon

Pour cette sous-partie, et pour celle-ci seulement, on considère que le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ est non galiléen et que le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ est galiléen.

□ **Q 9** - Décrire le mouvement du référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_g$. On considère la ligne de TGV Paris-Lyon, dont la longueur est approximativement de 500 km, et sur laquelle les trains (figure 4) roulent à la vitesse $V_0 = 300$ km · h⁻¹ par rapport au référentiel terrestre. La ligne est composée de deux voies : une servant pour le trajet de Paris vers Lyon, l'autre pour le trajet Lyon vers Paris.

On étudie par la suite un TGV allant de Paris à Lyon, sur un tronçon rectiligne horizontal, localement confondu avec une ligne méridienne nord-sud. La figure 5 schématise



FIGURE 4 – Un train de dernière génération circulant sur la ligne Paris-Lyon.

le contact entre les rails et les roues de ce train.

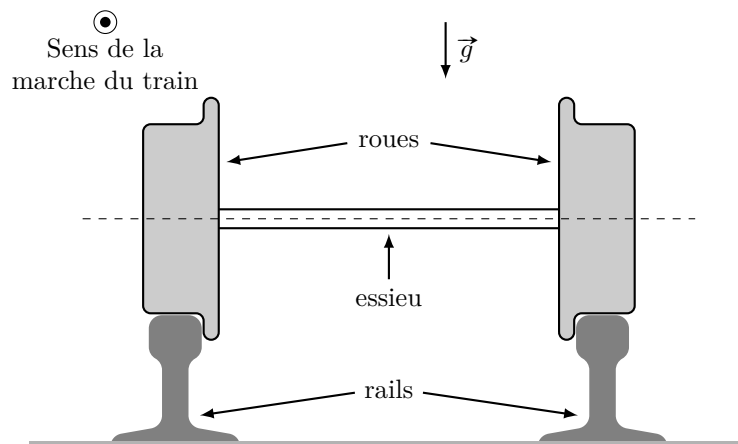


FIGURE 5 – Schéma - en coupe - du contact entre les rails et les roues du TGV (les échelles de distance ne sont pas respectées).

□ **Q 10** - La prise en compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre implique l'existence d'une force normale horizontale exercée par l'intérieur d'un des deux rails sur les roues avec lesquelles il est en contact. Identifier, en le justifiant, le rail concerné dans le cas d'un TGV circulant de Paris vers Lyon. Sur un schéma inspiré de celui de la figure 5 faire figurer les forces de contact exercées par les rails sur les roues.

De nos jours, les rails sont réalisés en acier trempé très dur, afin d'en limiter l'usure.

Il existe différents types d'usure des rails ; nous n'envisagerons ici que l'usure abrasive, qui a lieu à l'interface entre les roues et le rail. On note que, lorsqu'on étudie l'usure, on prend en compte le fait que le contact roue-rail n'est pas ponctuel : cela implique qu'il y a nécessairement une zone de contact glissant, même en cas d'adhérence. Diverses lois permettent de quantifier cette usure ; nous nous limiterons à la loi d'usure de Preston-Archard selon laquelle le volume de matière usée peut être calculé par la formule

$$V = k \frac{F_n}{H} d$$

où H est la dureté du matériau dont l'unité est $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$, d la distance sur laquelle a eu lieu le glissement, F_n la force normale au glissement et k un coefficient, appelé coefficient d'Archard, qui dépend des conditions expérimentales, matériaux, température, géométrie, etc.

□ **Q 11** - Discuter qualitativement la loi de Preston-Archard.

□ **Q 12** - Déterminer la dimension du coefficient d'Archard k .

□ **Q 13** - Pour le rail identifié dans la question 10, comparer le degré d'usure des faces supérieure et intérieure du rail. Préciser les approximations réalisées.

Données

Accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Coefficient d'adhérence fonte acier $f_a = 0,12$

Latitude des villes citées Lyon = $45,8^\circ$ Nord ; Paris = $48,9^\circ$ Nord

III. Diagramme potentiel pH

Le diagramme E - pH a été tracé à pour une concentration maximale en élément chrome (atomique) en solution de $c = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Conventions de tracé :

- à la frontière des domaines de prédominance de deux espèces solubles, on considère que les concentrations atomiques du chrome sous chacune des deux formes sont les mêmes ;
- à la frontière du domaine d'existence entre une espèce solide et une espèce en solution, la concentration atomique est égale à c .

Le diagramme fait intervenir les espèces $\text{Cr}_{(s)}$, $\text{Cr}_{(aq)}^{2+}$, $\text{Cr}_{(aq)}^{3+}$, $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$, $\text{Cr}(\text{OH})_{4(aq)}^-$, $\text{Cr}_2\text{O}_{7(aq)}^{2-}$ et $\text{CrO}_{4(aq)}^{2-}$.

□ **Q 14** - Placer, en le justifiant rapidement, les différentes espèces dans les zones du diagramme.

□ **Q 15** - Déterminer l'équation associée au couple $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{CrO}_4^{2-}$. Déterminer s'il s'agit d'une frontière d'existence ou de prédominance et si la réaction liant ces deux espèces est acido-basique ou d'oxydoréduction. Par lecture graphique, déterminer la valeur de la constante de réaction associé à ce couple. On supposera que sur la frontière $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = [\text{CrO}_4^{2-}]/2 = c/4$.

□ **Q 16** - Déterminer l'équation de la frontière $\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$. Déterminer s'il s'agit d'une frontière d'existence ou de prédominance et si la réaction liant ces deux espèces est acido-basique ou d'oxydoréduction.

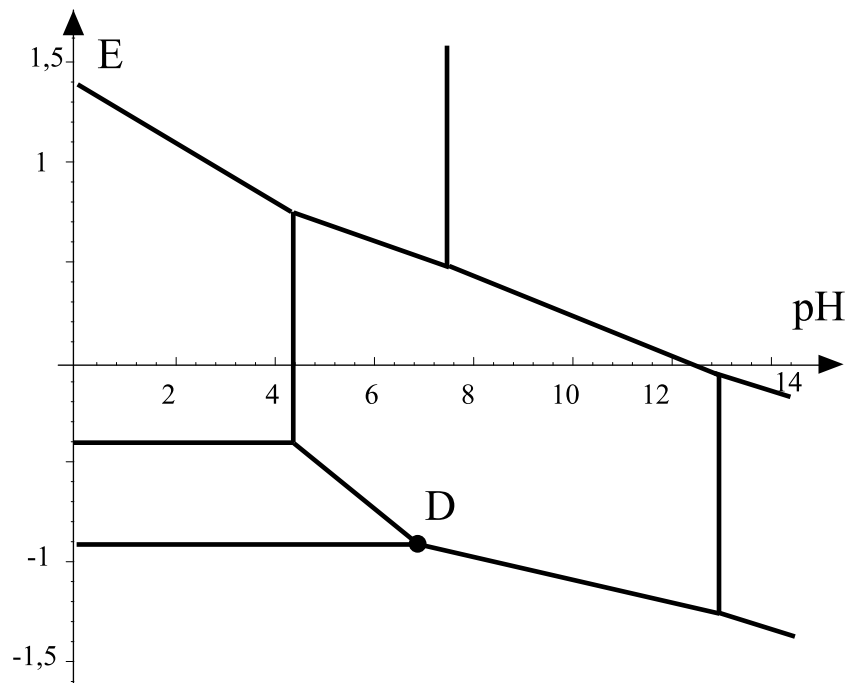
□ **Q 17** - Quelle est la signification physique du point D sur le diagramme ? Déterminer par un calcul ses coordonnées.

□ **Q 18** - Faire figurer sur le diagramme la zone de stabilité thermodynamique de l'eau.

□ **Q 19** - Le chrome métallique est-il stable en solution aqueuse ? Justifier.

Données : $\text{pKs}(\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}) = 31$

Couple	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$	$\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}$	$\text{Cr}^{2+}/\text{Cr}_{(s)}$	$\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}$	$\text{H}_2\text{O}/\text{H}_{2(g)}$
E° (V)	1,33	-0,41	-0,86	1,23	0



Problème ouvert

On suppose l'existence d'un référentiel galiléen dans lequel le vaisseau est en rotation. Considérons un corps de masse m , posé sur le sol, immobile à une distance R de l'axe de rotation.

SCHEMA

Il est soumis à

- la réaction du support $\vec{N} - N\vec{e}_r$
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 R \vec{e}_r$
- la force de Coriolis est nulle s'il est immobile.

On en déduit qu'en l'absence de mouvement :

$$N = m\omega^2 R$$

Pour avoir une gravité artificielle, il faut que :

$$\omega^2 R \approx g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Sur l'image on peut estimer le rayon du vaisseau en considérant que la hauteur de la partie habitable vaut 5 m. Le rayon est 6 fois plus grand environ : $R \sim 30 \text{ m}$. On en déduit la vitesse de rotation :

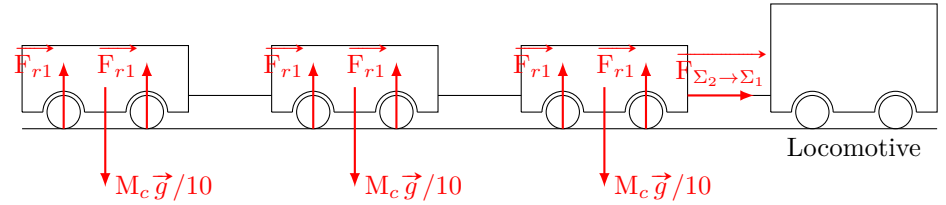
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 5,5 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Cette valeur est cohérente avec le mouvement présenté dans le film.

Mécanique du transport ferroviaire

1 - Démarrage du train de Trevithick

□ **Q 1** - On réalise un schéma avec trois wagons :



L'application du principe fondamental de la dynamique sur le système Σ_1 , dans le référentiel de la voie ferrée galiléen donne :

$$M_c \vec{g} + 40 \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} = M_c \vec{a}_0$$

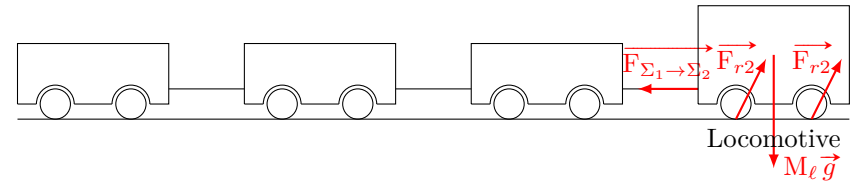
On projette cette équation sur les directions horizontale et verticale :

$$\begin{cases} M_c g = 40 ||\vec{F}_{r1}|| \\ ||\vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}|| = M_c a_0 \end{cases}$$

Soit simplement :

$$\vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} = M_c \vec{a}_0$$

□ **Q 2** - Schéma :



□ **Q 3** - On applique le PFD sur le système Σ_2 (locomotive) dans le référentiel terrestre :

$$\vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2} + M_l \vec{g} + 4 \vec{N}_{r2} + 4 \vec{T}_{r2} = M_l \vec{a}_0$$

L'équation projetée sur l'axe vertical est $M_l g = 4 ||\vec{N}_{r2}||$. Ainsi, horizontalement il reste :

$$4 \vec{T}_{r2} = M_l \vec{a}_0 - \vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}$$

$M_l \vec{a}_0$ comme $-\vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}$ sont nécessairement dirigés vers l'avant, donc $\vec{T}_{r2}$ est vers l'avant. En utilisant la troisième loi de Newton : $\vec{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} = -\vec{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}$ et en reportant le résultat de la question **Q19** :

$$\vec{T}_{r2} = \frac{M_c + M_l}{4} \vec{a}_0$$

□ **Q 4** - De l'égalité donnée dans l'énoncé, on en déduit :

$$\frac{M_c + M_\ell}{4} \vec{a}_0 = 0,1 f_a \frac{M_\ell g}{4} \vec{u}_x$$

où $\vec{u}_x$ est l'axe du mouvement. Ainsi :

$$\ddot{x} = 0,1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g$$

On intègre :

$$\dot{x} = 0,1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g t + K$$

Soit $\dot{x}(0) = K$. Or $\dot{x}(0) = 0$ donc $K = 0$. La vitesse du convoi est donc :

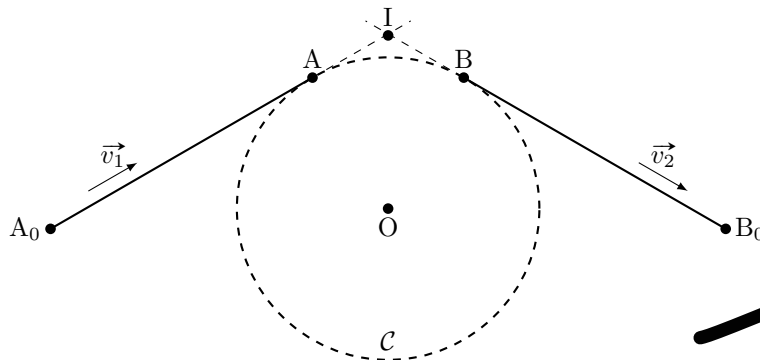
$$v_x(t) = 0,1 f_a \frac{M_\ell}{M_c + M_\ell} g t$$

La vitesse de croisière est atteinte au bout de :

$$t_0 = \frac{v_0 (M_c + M_\ell)}{0,1 f_a M_\ell g} = 208 \text{ s} = 3 \text{ min } 28 \text{ s}$$

2 - Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

□ **Q 5** - On note I l'intersection des droites (A₀A) et (B₀B) et O le centre du cercle :



D'après l'énoncé, $\widehat{AIB} = 120^\circ$. Ainsi $\widehat{AIO} = \widehat{AIB}/2 = 60^\circ$. Puis :

$$\widehat{IOA} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{AIO} = 90^\circ - \widehat{AIO}$$

Dans le triangle rectangle AOH, H étant le projeté orthogonal de A sur (IO) :

$$\frac{AH}{R_c} = \sin(\widehat{IOA}) = \cos\left(\frac{\widehat{AIB}}{2}\right)$$

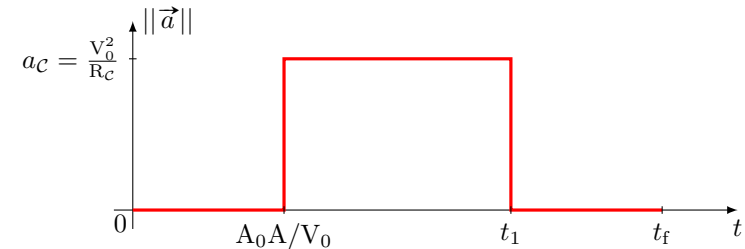
Soit

$$R_c = \frac{d_{AB}}{2 \cos\left(\frac{\widehat{AIB}}{2}\right)}$$

□ **Q 6** - Sur la ligne droite, entre A₀ et A, le mouvement étant rectiligne et uniforme, l'accélération est donc nulle. De même, entre B₀ et B, on a également $\vec{a} = \vec{0}$. Entre A et B, le mouvement est circulaire uniforme donc dans la base polaire correspondante :

$$\vec{a} = -\frac{V_0^2}{R_c} \vec{u}_r$$

Le temps nécessaire pour parcourir le segment [A₀A] est A₀A/V₀, celui pour parcourir l'arc de cercle AB est R_c $\widehat{AOB}$ /V₀ avec $\widehat{AOB} = \pi/3$ rad. Enfin, le temps nécessaire pour parcourir le segment [B₀B] est B₀B/V₀. D'où le graphique :



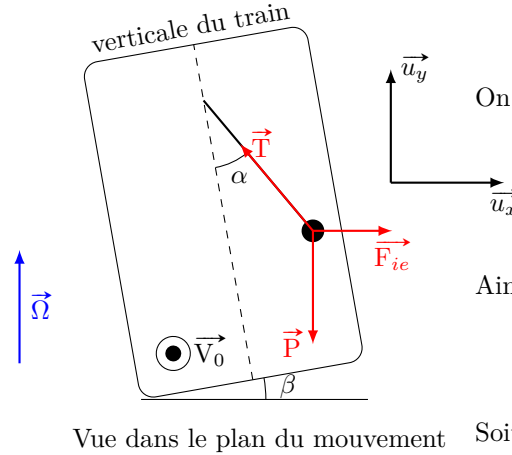
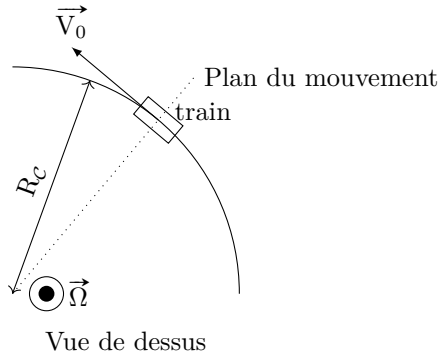
$$t_f = \frac{A_0A + R_c \widehat{AOB} + B_0B}{V_0}$$

$$t_1 = \frac{A_0A + R_c \widehat{AOB}}{V_0}$$

□ **Q 7** - Application numérique :

$$a_c = \frac{V_0^2}{R_c} = \frac{V_0^2}{\frac{d_{AB}}{2 \cos\left(\frac{\widehat{AIB}}{2}\right)}} = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

□ **Q 8** - On étudie le mouvement du pendule statique dans le référentiel non-galiléen du train, ce dernier étant en mouvement circulaire uniforme autour d'un axe fixe vertical. Faisons deux schémas de la situation :



D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$$

On projette sur les deux coordonnées :

$$\begin{cases} m \frac{V_0^2}{R_C} = T \sin(\alpha + \beta) \\ mg = T \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Ainsi, en divisant la première équation par la seconde :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{V_0^2}{g R_C}$$

Soit :

$$\beta = \arctan\left(\frac{V_0^2}{g R_C}\right) - \alpha = 0,272 \text{ rad} = 15,6^\circ$$

Comme indiqué sur le schéma ci-dessus, on considère un dévers vers l'intérieur : si le rail extérieur est surélevé, $\beta > 0$, sinon $\beta < 0$. L'angle entre la verticale du train et le pendule est mesuré sur la figure 5 :

$$\tan \alpha = \frac{0,2 \text{ cm}}{4,9 \text{ cm}} \quad \text{soit} \quad \alpha = 0,041 \text{ rad}$$

On étudie le problème dans la base cartésienne horizontale $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, de sorte que :

$$\vec{g} = -g\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{V}_0 = V_0\vec{u}_z$$

Sur la masse s'exercent :

- le poids :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_y$$

- le poids :

$$\vec{T} = T \cos(\alpha + \beta) \vec{u}_y - T \sin(\alpha + \beta) \vec{u}_x$$

- on prend en compte le caractère non-galiléen du référentiel du train par la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\Omega^2 R_C \vec{u}_x = -m \frac{V_0^2}{R_C} \vec{u}_x$$

- et la force d'inertie de Coriolis, nulle car le pendule est fixe dans le référentiel du train.

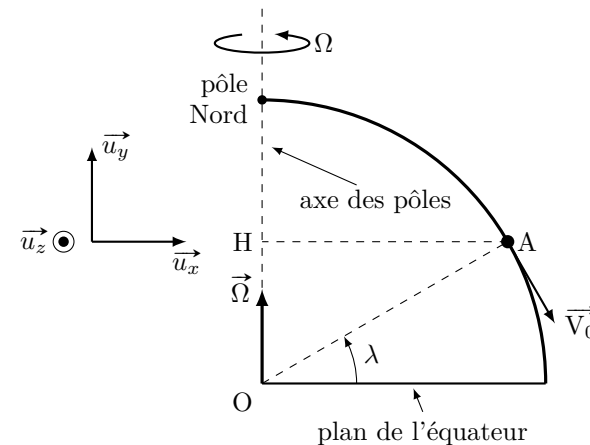
Le rail extérieur est plus haut que le rail intérieur de $15,6^\circ$ soit une surélévation de 39 cm (écartement de 140 cm).

□ **Q 9** - Le référentiel terrestre a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{23 \text{ h } 56 \text{ min}}$$

autour de l'axe des pôles.

□ **Q 10** - Faisons un schéma de la situation : $\vec{V}_0$ est dirigé vers le Nord le long de la surface de la Terre et Ω est dirigé selon l'axe des pôles :



On exprime la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

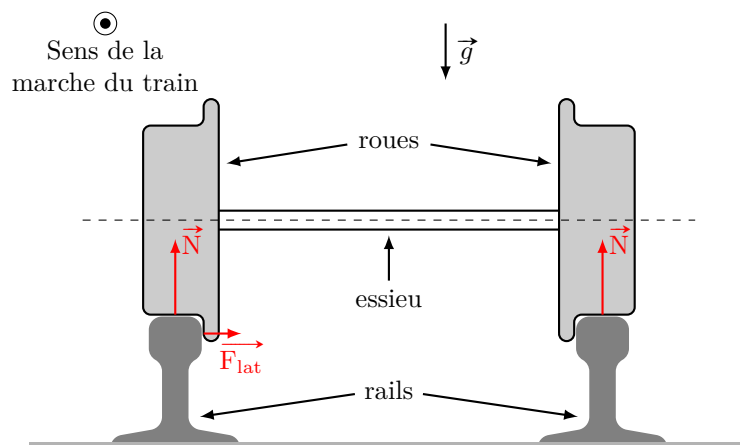
avec :

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{v} = -V_0 \cos \lambda \vec{u}_y + V \sin \lambda \vec{u}_x$$

Soit :

$$\vec{F}_{ic} = 2m\Omega V_0 \sin \lambda \vec{u}_z$$

La force est dirigée vers l'Ouest. Ainsi, pour maintenir l'équilibre des forces dans la direction Est-Ouest, une force est exercée par le rail à l'Ouest vers l'Est :



□ **Q 11** - H intervient au dénominateur : plus le matériau utilisé est dur, moins le volume abrasé est grand. F_n intervient au numérateur, plus le matériau utilisé est dur, plus le volume abrasé est grand et ce de façon proportionnelle. Le volume abrasé est enfin logiquement proportionnel à la longueur du rail.

□ **Q 12** - On a :

$$[k] = \frac{[V][H]}{[F_n][d]} = \frac{L^3 \cdot M \cdot L^{-2}}{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L} = L^{-1} \cdot T^2$$

La dimension de k est $L^{-1} \cdot T^2$

□ **Q 13** - Le volume d'acier abrasé sur la face supérieure d'un rail, sur une longueur $d = 500$ km de rail est :

$$V_{\text{sup}} = N \times k \frac{mg}{2NH} d = k \frac{mg}{2H} d$$

N désigne le nombre d'essieu et m la masse du train. Ainsi, chaque roue supporte $1/(2N)$ fois le poids du train. Latéralement, la force exercée sur le rail à l'Est est

$F = 2m\Omega V \sin \lambda$, ce qui correspond à un volume arraché :

$$V_{\text{lat}} = k \frac{2m\Omega V_0 \sin \lambda}{H} d$$

Ainsi :

$$\frac{V_{\text{sup}}}{V_{\text{lat}}} = \frac{mg}{4\Omega V_0 \sin \lambda}$$

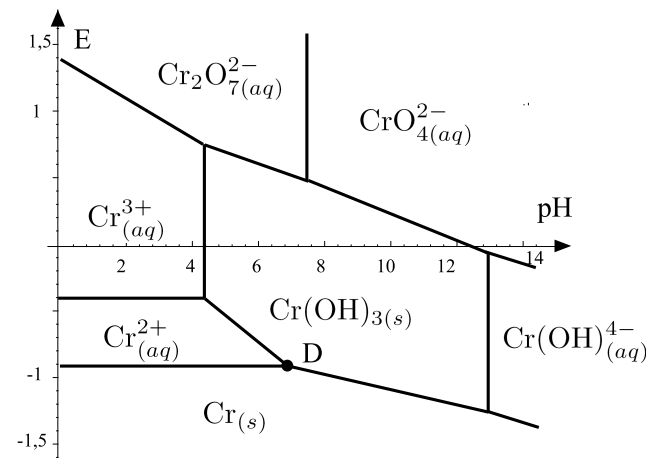
ce rapport vaut 563 à la latitude de Lyon et 536 à la latitude de Paris.

Diagramme potentiel pH

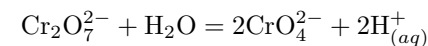
□ **Q 14** - Pour chaque espèce, établissons le nombre d'oxydation de l'élément chrome :

Espèce	$\text{Cr}_{(s)}$	Cr^{2+}	Cr^{3+}	$\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$	$\text{Cr}(\text{OH})_{4(aq)}^{-}$	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$	CrO_4^{2-}
n.o.	0	+II	+III	+III	+III	+VI	+VI

En remplissant le diagramme par n.o. croissant, il vient



□ **Q 15** - La frontière est verticale, il s'agit d'une réaction acido-basique.

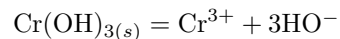


La constante associée à cette réaction est :

$$K = \frac{[\text{CrO}_4^{2-}]^2 [\text{H}^+]^2}{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]} = 10^{-17}$$

Handwritten notes:
C/2
- C/4

□ **Q 16** - La frontière est verticale, il s'agit d'une réaction acido-basique.



Sur la frontière, par définition, on a :

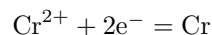
$$K_s = [\text{Cr}^{3+}][\text{HO}^-]^3 \text{ et } [\text{Cr}^{3+}] = c.$$

Ainsi,
$$[\text{HO}^-] = \left(\frac{K_s}{c}\right)^{1/3} \text{ soit } \text{pH} = 14 + \log[\text{HO}^-] = 4,4$$

□ **Q 17** - Au point D il y a dismutation de Cr^{2+} en $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$ et $\text{Cr}_{(s)}$. En ce point, il y a égalité des potentiels de Nernst des couples Cr^{2+}/Cr et $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}/\text{Cr}^{2+}$.

L'ordonnée du point D est donné grâce au couple Cr^{2+}/Cr .

Écrivons la demi-équation électronique associée à ce couple

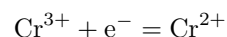


Sur la frontière $[\text{Cr}^{2+}] = c$, le potentiels de Nernst associé est :

$$E_1 = E^\circ(\text{Cr}^{2+}/\text{Cr}) + 0,03 \log[\text{Cr}^{2+}] = -0,92 \text{ V}$$

L'équation de la droite frontière entre $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$ et Cr^{2+} peut s'obtenir de deux manières différentes. La première, directe consiste à dire que Cr^{3+} est présent dans le domaine d'existence de $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$.

Écrivons la demi-équation électronique associée au couple, avec la condition d'existence du précipité sur la frontière :



$$[\text{Cr}^{3+}][\text{OH}^-]^3 = K_s$$

$$[\text{Cr}^{2+}] = c_0$$

le potentiels de Nernst associé est :

$$E_2 = E^\circ(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}) + 0,06 \log \frac{[\text{Cr}^{3+}]}{[\text{Cr}^{2+}]}$$

En utilisant les conditions sur la frontière, on obtient :

$$E_2 = E^\circ(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}) + 0,06 \log \frac{c_0[\text{OH}^-]^3}{K_s}$$

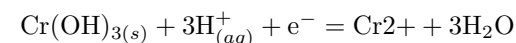
d'où

$$E^\circ(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}) + 0,06 \log \frac{c_0 K_s^3}{K_s} - 0,18 \text{pH} = 0,37 - 0,18 \text{pH}$$

L'autre méthode est possible en utilisant les réponses aux questions précédentes. La frontière entre $\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}$ permet de définir les coordonnées d'un point de la frontière $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}/\text{Cr}^{2+}$:

$$E_2 = E^\circ(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}) + 0,06 \log \frac{[\text{Cr}^{3+}]}{[\text{Cr}^{2+}]} = -0,41 \text{ V}$$

Écrivons la demi-équation associée au couple $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}/\text{Cr}^{2+}$, il vient :



Le potentiel de Nernst associé est de la forme :

$$E = E^\circ + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Cr}^{2+}]} = C^{\text{te}} - 0,18 \text{pH}$$

L'utilisation du point de coordonnées : (4,4; -0,92) permet d'obtenir :

$$E_2 = 0,37 - 0,18 \text{pH}$$

Égalons les potentiels, il vient

$$-0,92 = 0,37 - 0,18 \text{pH}$$

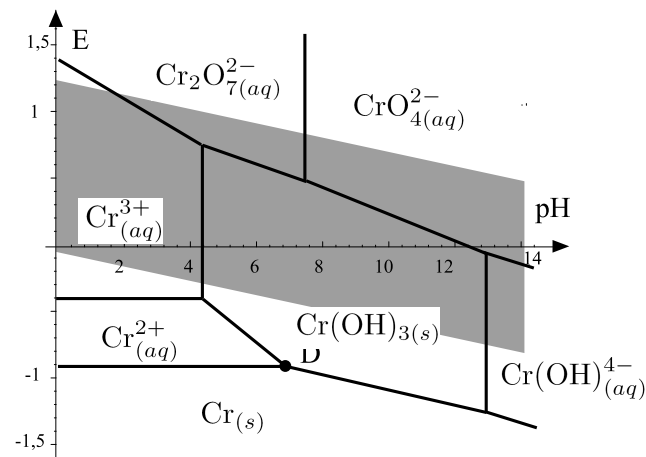
d'où

$$\text{pH} = 7,2$$

□ **Q 18** - Pour les couples faisant intervenir l'eau, les potentiels sont

$$\begin{cases} E = 1,23 - 0,06 \text{pH} \\ E = -0,06 \text{pH} \end{cases}$$

La zone de stabilité de l'eau est alors la suivante.



□ **Q 19** - La zone de stabilité de l'eau et celle du chrome étant disjointe, on en déduit que le chrome n'est pas stable en solution aqueuse. La présence d'un précipité $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$ permet toutefois d'espérer la passivation et donc de limiter la corrosion ultérieure du métal.