

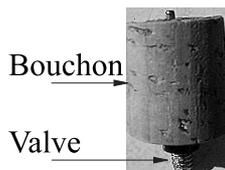
Ne nécessitant que peu de moyens et possédant des performances impressionnantes, la fusée à eau est un jouet particulièrement amusant. Nous tâcherons d'obtenir une solution analytique de son fonctionnement, accessible à un niveau BAC+2.

Introduction

Après une brève présentation d'une fusée à eau, nous dégagerons les principes physiques les plus pertinents pour expliquer son fonctionnement. En utilisant des connaissances d'un niveau BAC+2, nous obtiendrons une solution analytique de l'altitude maximale atteinte par une fusée que nous comparerons à des expériences réalisées par des élèves. Nous montrerons que la vidange de la fusée s'effectue en un dizaine de millisecondes, l'altitude atteinte est alors de moins d'un mètre. L'expulsion de l'eau permet d'obtenir une vitesse de quelques dizaines de mètres par seconde. Ensuite, la fusée suit un mouvement balistique et peut culminer à plusieurs dizaines de mètres de hauteur.

1 Présentation de la fusée

1.1 Principe



Le corps de la fusée à eau est une bouteille d'eau minérale gazeuse pouvant résister à des hautes pressions (plus de 6 bars). Cette fusée est remplie de plusieurs centilitres d'eau. Une pompe à main, connectée sur une valve de chambre à air incorporée à un bouchon de liège permet d'augmenter la pression à l'intérieur de la fusée. Dès que la pression est suffisante pour décrocher le bouchon, la fusée décolle et l'expulsion de l'eau lui confère une vitesse permettant d'atteindre une dizaine de mètres d'altitude.

FIGURE 1 – Bouchon de pressurisation

Pour la réalisation d'une fusée à eau nous renvoyons les lecteurs à l'article [2] ou au site <http://fuzeano.free.fr>.

1.2 Modélisation

La bouteille est modélisée par un cylindre de hauteur L , de section S avec un goulot de section s . On note m_0 la masse à vide de la bouteille.

Nous noterons \mathcal{R} le référentiel muni de l'axe Oz associé au sol et \mathcal{R}' le référentiel muni de l'axe $O'z'$ associé à la bouteille. Le mouvement de la bouteille est repéré par z , le niveau d'eau par $h(t)$ et la vitesse d'éjection de l'eau dans \mathcal{R}' par $\mathbf{u} = -u\mathbf{e}_z$. La pression à l'intérieur de la bouteille est notée $P(t)$, la pression extérieure P_{ext} . Initialement, la hauteur d'eau ainsi que la pression seront notées respectivement $h_0 = h(t = 0)$ et $P_0 = P(t = 0)$

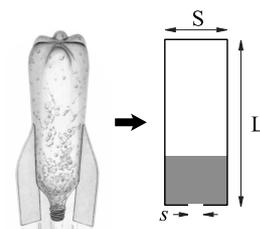


FIGURE 2 – Modélisation de la fusée

1.3 Hypothèses de travail

Le but de cette étude est tout d'abord de déterminer l'évolution de la pression et du niveau de liquide pour connaître la vitesse d'éjection de l'eau. Nous serons alors en mesure de déterminer la force de poussée ainsi que le temps pendant lequel cette poussée s'effectue. Nous utiliserons, sauf mention contraire, les données suivantes :

Données :

s	S	L	m_0	h_0	P_0	P_{ext}	ρ
3 cm ²	75 cm ²	27 cm	140 g	2 cm	3 bar	1 bar	1000 kg.m ⁻³

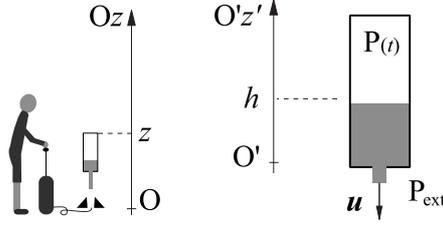


FIGURE 3 – Notations

Nous travaillerons en négligeant tous les termes dont l'influence ne dépasse pas 10% de la valeur du terme prépondérant. Nous supposons que la bouteille est faiblement remplie : le niveau du liquide à l'intérieur noté sera initialement petit devant la hauteur de la bouteille :

$$h(0) = h_0 \ll L$$

De plus, nous supposons que la pression initiale est suffisamment faible pour négliger la poussée due à l'air une fois que toute l'eau a été éjectée. Il est toutefois possible d'obtenir une résolution numérique en tenant compte de la poussée de l'air [4].

2 Vidange de la bouteille

2.1 Évolution de la pression

Expérimentalement, le temps de poussée est très inférieur à la seconde. Nous pouvons sans prendre de risque supposer que la décompression de l'air à l'intérieur de la bouteille est adiabatique et réversible. En assimilant l'air à un gaz parfait, il suit la loi de Laplace.

Occupant initialement un volume $S(L - h_0)$ à la pression P_0 puis un volume $S(L - h)$ à la pression P , nous pouvons écrire que :

$$P(t)[S(L - h(t))]^\gamma = P_0[S(L - h_0)]^\gamma$$

Dans l'hypothèse d'un faible remplissage, un développement limité permet de conclure que

$$P(t) = P_0 \left(1 - \gamma \frac{h_0 - h(t)}{L} \right)$$

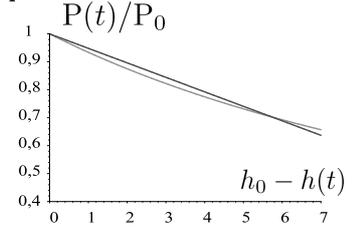


FIGURE 4 – Écart de $P(t)$ à une évolution linéaire pour $h_0 = 7$ cm

2.2 Évolution du niveau d'eau

2.2.1 Équation de Navier-Stokes

Les forces volumiques appliquées à l'eau contenue dans la bouteille sont :

- les forces de pression $-\mathbf{grad} P$;
- la gravité $\rho \mathbf{g}$;
- les forces de viscosité $\eta \Delta \mathbf{v}$
- la force d'inertie d'entraînement $-\rho \mathbf{a}_e$.

En considérant l'eau comme incompressible, on obtient l'équation de Navier-Stokes [1] :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{a}_e - \eta \Delta \mathbf{v}$$

2.2.2 Simplification

Le temps d'établissement de l'écoulement est de l'ordre de h_0/c_S où $c_S \approx 1000$ m.s⁻¹ est la célérité du son dans le fluide. Comme $h_0/c_S \approx 2.10^{-5}$ s, le temps de poussée étant nettement supérieur (voir 2.3), nous pourrions considérer l'écoulement comme stationnaire.

Le terme prépondérant est la force volumique de pression

$$|\mathbf{grad} P| \sim \frac{P_0 - P_{\text{ext}}}{h_0} = 1.10^7 \text{ N.m}^{-3}$$

L'effet de la gravite $\rho g \approx 10^4 \text{ N.m}^{-3}$ peut être négligé. On fera la supposition que la force d'entraînement est négligeable, hypothèse que l'on vérifiera à posteriori (cf. 3.4.4).

Enfin, les pertes par viscosité sont de l'ordre de : $|\eta \Delta \mathbf{v}| \approx \eta V / (\sqrt{s})^2$ où V est l'ordre de grandeur de la vitesse et \sqrt{s} la dimension caractéristique sur laquelle la vitesse de l'écoulement varie. Ainsi, les pertes sont négligeables :

$$|\eta \Delta \mathbf{v}| \sim 1.10^{-3} \frac{30}{(1.10^{-2})^2} = 300 \text{ N.m}^{-3}$$

2.2.3 Relation de Bernoulli

Toutes les hypothèses sont donc réunies pour passer de l'équation de Navier Stokes à la relation de Bernoulli. Suivant une ligne de courant, commençant au niveau d'eau h et finissant à l'extérieur de la bouteille, on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho \dot{h}^2 + P(t) = \frac{1}{2} \rho u^2 + P_{\text{ext}}$$

L'eau étant supposée incompressible, l'équation de conservation de la masse se traduit par la conservation du débit massique :

$$D_m = su = -S\dot{h}$$

En considérant que le rapport des surfaces est important : $S \gg s$, $\dot{h} \ll u$ la relation de Bernoulli se limite alors à

$$u = -\frac{S}{s} \dot{h} = \sqrt{\frac{2(P(t) - P_{\text{ext}})}{\rho}}$$

2.3 Temps de vidange

En couplant les équations reliant la pression et le niveau d'eau on obtient une équation différentielle sur h :

$$-\frac{S}{s} \dot{h} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \left(P_0 \left(1 - \gamma \frac{h_0 - h(t)}{L} \right) - P_{\text{ext}} \right)}$$

Cette équation s'écrit encore :

$$\dot{h} = -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})}{\rho} \left(1 - \gamma \frac{P_0}{P_0 - P_{\text{ext}}} \frac{h_0 - h(t)}{L} \right)}$$

En utilisant l'hypothèse de faible remplissage ($h \ll L$), on obtient, grâce à un développement limité, une équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{h} = -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})}{\rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \frac{P_0}{P_0 - P_{\text{ext}}} \frac{h_0 - h(t)}{L} \right)}$$

Écrivons cette équation sous forme canonique

$$\dot{h} + \frac{s}{S} \frac{\gamma P_0}{2L} \sqrt{\frac{2}{\rho(P_0 - P_{\text{ext}})}} h = -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})}{\rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \frac{P_0}{P_0 - P_{\text{ext}}} \frac{h_0}{L} \right)}$$

En considérant que h/L et s/S sont des infiniment petits du premier ordre, le second membre peut se simplifier en négligeant le terme en h_0/L . Il reste :

$$\dot{h} + \frac{s}{S} \frac{\gamma P_0}{2L} \sqrt{\frac{2}{\rho(P_0 - P_{\text{ext}})}} h = -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})}{\rho}}$$

Posons $\frac{1}{\tau} = \frac{s}{S} \frac{\gamma P_0}{2L} \sqrt{\frac{2}{\rho(P_0 - P_{\text{ext}})}}$ et $h_F = 2L \frac{P_0 - P_{\text{ext}}}{\gamma P_0}$, la résolution de cette équation différentielle avec $h(0) = h_0$ conduit à

$$h(t) = -h_F + (h_0 + h_F)e^{-t/\tau}$$

Le temps de vidange du récipient, correspondant à $h(t) = 0$ est donc de

$$\tau_{\text{vidange}} = \tau \ln \frac{h_F + h_0}{h_F}$$

Avec $\tau = 0,32$ s et $h_F = 26$ cm, toujours dans l'hypothèse d'un faible remplissage, $h_0 \ll h_F$, on obtient alors par un développement limité¹ :

$$\tau_{\text{vidange}} = \tau \frac{h_0}{h_F} = \frac{S}{s} h_0 \sqrt{\frac{\rho}{2(P_0 - P_{\text{ext}})}} = 0,025 \text{ s}$$

Le temps de poussée est donc très bref, l'hypothèse de décompression adiabatique est donc bien justifiée. De plus, ce temps étant très inférieure à τ , on peut assimiler l'évolution de $h(t)$ à une évolution linéaire :

$$h(t) = h_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_{\text{vidange}}}\right)$$

3 Altitude et vitesse atteinte pendant la poussée

3.1 Équation du mouvement

Dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, la fusée est soumise à son poids et à la poussée de l'eau. L'application du théorème d'Euler (non au programme de 2^e année mais facilement assimilable) suivant l'axe Oz permet d'obtenir l'équation du mouvement :

$$m(t)\ddot{z} = -m(t)g + D_m u$$

où $m(t) = m_0 + \rho S h(t)$ est la masse de la fusée à l'instant t et $D_m = -\dot{m}$ est le débit massique d'éjection de l'eau.

3.2 Simplification

Exprimons le débit en fonction de la vitesse d'éjection u :

$$D_m = -\rho S \dot{h} = \rho s u$$

La durée d'évolution de $h(t)$ étant très inférieure à τ , nous pouvons en déduire que $\dot{h} \approx C^{\text{te}}$, ainsi (cf. 2.2.3)

$$u \approx \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})}{\rho}}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$m(t)\ddot{z} = -m(t)g + \rho s u^2 \approx -m(t)g + 2(P_0 - P_{\text{ext}})s$$

Évaluons ces différents termes :

$$m(t)g \leq 10 \text{ N} \text{ tandis que } 2(P_0 - P_{\text{ext}})s \approx 120 \text{ N}$$

Le poids $m(t)g$ est peu influent devant la poussée $2(P_0 - P_{\text{ext}})s$. Ainsi, l'équation du mouvement se résume à

$$m(t)\ddot{z} = 2(P_0 - P_{\text{ext}})s$$

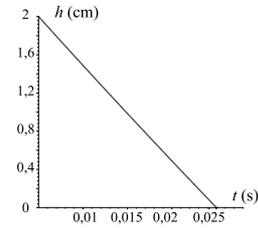


FIGURE 5 – Évolution de $h(t)$

1. Ici l'hypothèse d'un faible remplissage est nécessaire, pour des remplissages conséquents, la simplification est illicite.

3.3 Vitesse obtenue en fin de poussée

Avec m_0 la masse à vide de la bouteille, l'évolution de la masse de la fusée est régie par l'équation suivante :

$$m(t) = m_0 + \rho S h_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_{\text{vidange}}}\right)$$

En remplaçant la masse dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$\ddot{z} = \frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})s}{m_0 + \rho S h_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_{\text{vidange}}}\right)}$$

L'intégration de l'équation précédente entre $t = 0$ et $t = \tau_{\text{vidange}}$ donne :

$$\dot{z}_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_{\text{ext}})}{\rho}} \ln \frac{m_0 + \rho S h_0}{m_0} = 15 \text{ m.s}^{-1}$$

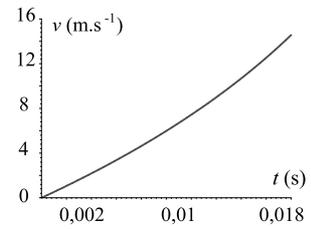


FIGURE 6 – Évolution de $\dot{z}(t)$

3.4 Discussion

3.4.1 Influence de la pression

La formule précédente permet de prédire que la fusée culmine d'autant plus haut que la pression dans la bouteille est élevée. L'utilisation de bouchons en liège permet de fabriquer rapidement une fusée mais à l'inconvénient de se détacher dès 3 bars de pression. Des "fuséistes" préconisent des bouchons en caoutchouc compressé avant l'insertion dans le goulot. On peut ainsi espérer atteindre une pression de 6 à 8 bars. De multiples astuces d'expérimentateurs géniaux sont disponibles sur le net pour augmenter la pression.

3.4.2 Influence du remplissage

Le remplissage de la fusée intervient dans la vitesse sous la forme d'un logarithme et notre modèle indique simplement que plus le remplissage est important plus la fusée va vite en fin de vidange et donc atteindra une altitude élevée. Ce résultat est faux, puisque la pression chute d'autant plus que la fusée est remplie. Pour améliorer l'altitude atteinte par la fusée, il faut la remplir de façon à ce que la pression en fin de vidange soit suffisante pour l'accélérer. C'est à dire que la pression finale doit être supérieure à la pression extérieure. En supposant une force de poussée positive en fin de vidange, soit $P > P_{\text{ext}}$ on peut montrer que

$$\frac{h_0}{L} = 1 - \left(\frac{P_{\text{ext}}}{P_0}\right)^{1/\gamma} \approx 0,5$$

Curieusement, on trouve, parmi tous les conseils des "fuséistes" que le remplissage optimale est de $\frac{h_0}{L} \approx 0,3$. Faisons confiance à la pratique et admettons que notre modèle possède ses défauts...

3.4.3 Influence du rapport des surfaces

Il est intéressant de remarquer que le rapport des surfaces S/s n'apparaît pas dans le résultat final. Si ce rapport doit être important, son optimisation ne rend pas la fusée plus efficace. De nombreux essais ont été envisagés par les fuséistes sans résultat concluant.

3.4.4 Accélération d'entraînement

L'hypothèse consistant à négliger l'accélération de la pesanteur devant la force volumique de pression dans l'équation de Navier Stokes est vérifiée puisque :

$$\rho a_e \approx \rho \frac{\dot{z}_{\text{max}}}{\tau_{\text{vidange}}} = 6.10^5 \text{ N.m}^{-3} \text{ tandis que } |\mathbf{grad} P| \approx \frac{P_0 - P_{\text{ext}}}{h_0} = 1.10^7 \text{ N.m}^{-3}$$

Même si l'accélération est colossale au décollage, la force de poussée est telle au la force d'inertie d'entraînement joue un rôle mineur.

4 Altitude maximale et expériences

4.1 Première estimation

La vitesse en fin de poussée est obtenue pendant un laps de temps très bref, la distance parcourue pendant la poussée est donc inférieure à $\dot{z}_{\max} \tau_{\text{vidange}} = 0,38$ m. Pour obtenir l'altitude maximale atteinte par la fusée, nous pouvons donc partir des conditions initiales suivantes :

$$z(0) \approx 0 \text{ et } \dot{z}(0) = \dot{z}_{\max}$$

D'après quelques études menées par des fuséistes, le coefficient C_x est voisin de 0,1 pour une bouteille de Perrier. La force de frottement a donc pour valeur maximale [3] :

$$|f| = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{air}} S \dot{z}_{\max}^2 \approx 0,1 \text{ N}$$

Cette valeur est à comparer au poids : $m_0 g = 1,4$ N. Nous pourrions donc en première approximation négliger les frottements. La conservation de l'énergie mécanique de la fusée (désormais vide) entre l'instant initial ($\dot{z} = \dot{z}_{\max}$, $z = 0$) et l'apogée ($\dot{z} = 0$, z_{\max}) s'écrit :

$$\frac{1}{2} m_0 \dot{z}_{\max}^2 = m_0 g z_{\max}$$

On obtient alors

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_{\max}^2}{2g} = 11 \text{ m !!}$$

Cette altitude est évidemment surestimée mais permet quand même de prédire que l'on peut bien s'amuser !

4.2 Confrontation au réel

4.2.1 Expériences dans le cadre du modèle

Des élèves de TIPE du Lycée Pothier (Orléans) ont effectué un enregistrement vidéo et un pointage par le logiciel AVIMECA. La rapidité de la vidange du récipient ne permet pas d'obtenir des résultats convaincants sur la phase de propulsion. En revanche la trajectoire balistique peut être pointée il est possible d'obtenir l'altitude maximale atteinte :

m_0	Sh_0	P_{ext}	z_{\max}^{exp}
$140 \pm 10 \text{ g}$	$150 \pm 1 \text{ ml}$	$3,0 \pm 0,5 \text{ bar}$	$12 \pm 2 \text{ m}$

Compte tenue des incertitudes expérimentales, la valeur théorique de l'altitude obtenue doit être comprise entre 8 m et 13 m

$$8 \text{ m} \leq z_{\max}^{\text{th}} \leq 13 \text{ m}$$

Les deux intervalles de confiance des valeurs z_{\max}^{th} et z_{\max}^{exp} , nous pouvons confirmer que notre étude semble cohérente au regard des résultats expérimentaux. La principale incertitude réside dans le manomètre et il est très difficile de se procurer un manomètre fiable pour ce genre d'expérience.

4.2.2 Expériences hors cadre du modèle

Les meilleures fusées, dans les compétitions (récemment à Senlis), atteignent des hauteurs de 160 m (valeur obtenue à l'aide d'altimètre embarqué), il est agréable de remarquer qu'avec les conditions d'expérimentation du concours : remplissage à 1/3 du réservoir et pression de 6 bar, on obtient par notre modèle :

$$\dot{z}_{\max}^{\text{th}} = 56 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } z_{\max}^{\text{th}} = 150 \text{ m}$$

Ce résultat est cependant du au hasard car deux phénomènes se compensent : la force de traînée et la propulsion due à l'air négligé jusqu'ici. En effet, une fois l'eau éjectée, l'air contenu dans la bouteille est toujours comprimé et conduit à une part non négligeable à la propulsion.

5 Conclusion

Même si notre solution n'est à priori valable que pour des faibles remplissages, les résultats obtenus sont satisfaisants même pour des remplissages conséquents. Les fuséistes souvent aidés dans leur choix par des modélisations pourront désormais faire appel à une solution analytique pour améliorer leur fusée. Nous laissons au lecteur intéressé le soin de déterminer le bon compromis pour la masse à vide de la fusée : m_0 doit être faible pour avoir une meilleure poussée et suffisamment grand pour que l'influence des frottements soit la plus faible possible. Le lecteur curieux peut également déterminer la masse volumique idéale du fluide pour aller le plus haut possible puisque ρ apparaît à la fois au numérateur et au dénominateur dans \dot{z}_{\max} .

Enfin, l'enseignant amusé pourra faire de ce sujet, un sympathique devoir de révision.

Bibliographie

- [1] GUYON E. et al. , Hydrodynamique Physique, *EDP Sciences*, 2001.
- [2] MARCHAL D., La Fusée à eau, BUP 783, 1996.
- [3] PEREZ J- P. et al. , Mécanique, fondements et applications, *Dunod*, 2001.
- [4] SOULARD J-P., La Fusée à eau, BUP 732, 1991.

Annexe : Influence des frottements

Pour des remplissages plus importants, la vitesse \dot{z}_{\max} peut avoisiner facilement les 30 m.s^{-1} . Ainsi, dans le bilan des forces précédents, il est nécessaire d'ajouter une force de frottement de type :

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2}C_x\rho S v^2 \frac{\mathbf{v}}{v}$$

La projection du principe fondamental de la dynamique à la fusée, vide, sur l'axe Oz devient :

$$m_0\dot{v} = -mg - \frac{1}{2}C_x\rho_{\text{air}}Sv^2$$

Il est alors possible, avec l'aide de l'enseignant de mathématiques de proposer aux élèves un DM mathématiques-physique, souvent très apprécié. Il s'agit ici d'une équation différentielle à variables séparables. On obtient

$$\frac{dv}{1 + \frac{v^2}{v_{\text{lim}}^2}} = -gdt$$

avec $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2m_0g}{\rho_{\text{air}}SC_x}}$. L'intégration de cette équation différentielle conduit à l'obtention implicite de la vitesse, avec $v(0) = v_0$:

$$v_{\text{lim}} \arctan \frac{v}{v_{\text{lim}}} - v_{\text{lim}} \arctan \frac{v_0}{v_{\text{lim}}} = -gt$$

Soit $t_{\text{apogée}}$ le temps mis par la fusée pour atteindre son altitude maximale, caractérisée par $v(t_{\text{apogée}}) = 0$, on a :

$$t_{\text{apogée}} = \frac{v_{\text{lim}}}{g} \arctan \frac{v_0}{v_{\text{lim}}}$$

Ainsi, la vitesse s'exprime de façon explicite :

$$v(t) = v_{\text{lim}} \tan \left(\frac{g(t_{\text{apogée}} - t)}{v_{\text{lim}}} \right)$$

L'intégration de cette équation avec $z(0) = 0$ nous donne :

$$z(t) = \frac{v_{\text{lim}}^2}{g} \ln \frac{\cos \frac{g(t_{\text{apogée}} - t)}{v_{\text{lim}}}}{\cos \frac{g(t_{\text{apogée}})}{v_{\text{lim}}}}$$

Données :

m_0	C_x	S	ρ_{air}	v_0	v_{lim}
0.14 kg	0.20	75 cm ²	1.2 kg.m ⁻³	30 m.s ⁻¹	40 m.s ⁻¹

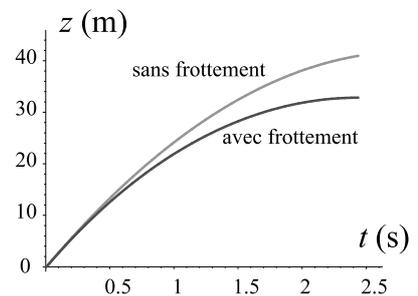


FIGURE 7 – Évolution de $z(t)$